Exercice 1 : (2013 S1) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ les points A(-1, 1, 0), B(1, 0, 1) et Ω (1, 1, -1) et la sphère (S) de centre Ω et de rayon $R = 3$

1) a) **Montrer que:** $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et **vérifier que** $x+y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

On a $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

Soit M(x ;y ;z)∈ (ABC)

$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (OAB)

(OAB) : 1x + 1y + (-1)z + d = 0 or O(0, 0, 0)∈(OAB)
Donc 0 + 0 + 0 + d = 0 donc d = 0
D'où (OAB) : x + y – z = 0

b) Vérifier que: $d(\Omega;(OAB)) = \sqrt{3}$ puis **montrer que** (OAB) coupe (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$.

(OAB) : x + y – z = 0 $\Omega(1;1;-1)$

$$d(\Omega,(OAB)) = \frac{|1+1-(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

D'où $d(\Omega,(OAB)) = \sqrt{3}$

On a $d(\Omega,(ABC)) = 3$ et $R = 3$

Donc $d(\Omega,(ABC)) < R$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{3^2-\sqrt{3}^2} = \sqrt{6}$

2) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (OAB).

On a (Δ) est perpendiculaire au plan (OAB).

On a $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (OAB)

Donc c'est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soit M(x ;y ;z)∈ (Δ) (Δ) pass2 par $\Omega(1;1;-1)$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$$ (t ∈ ℝ) est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) **Déterminer** le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ).

Soit H le centre du cercle (Γ) $(\Delta)\cap(OAB) = \{H\}$?

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (OAB)

$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(OAB)$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \\ x+y-z = 0 \end{cases}$$ donc $1+t+1+t+1+t = 0$

Donc $3t = -3 \Leftrightarrow t = -1$

$$\begin{cases} x = 1-1 = 0 \\ y = 1-1 = 0 \\ z = -1+1 = 0 \end{cases}$$ donc H = O

d'où O(0 ;0 ;0) est le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 : (2013 S1) (3pts)

On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 7+2i$, $b = 4+8i$, $c = -2+5i$

1) a) **Vérifier que :** $(1+i)(-3+6i) = -9+3i$ et

Montrer que $\frac{c-a}{b-a} = 1+i$

$$(1+i)(-3+6i) = -3+6i-3i+6i^2 = -3-6+3i$$

Donc $(1+i)(-3+6i) = -9+3i$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2+5i-7-2i}{4+8i-7-2i} = \frac{-9+3i}{-3+6i}$$

Or $(1+i)(-3+6i) = -9+3i \Leftrightarrow \frac{-9+3i}{-3+6i} = 1+i$

Donc $\frac{c-a}{b-a} = 1+i$

b) **En déduire que** $AC = AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

On a $\frac{c-a}{b-a} = 1+i$

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |1+i| \Leftrightarrow \frac{|c-a|}{|b-a|} = \sqrt{1+1} \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$$

D'où $AC = AB\sqrt{2}$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Donc $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

On a $\frac{c-a}{b-a}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

Donc $\arg(\frac{c-a}{b-a})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

or $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\arg(\frac{c-a}{b-a})[2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $d=10+11i$

$R(A)=D\Leftrightarrow d-b=e^{i\frac{\pi}{2}}(a-b)$
$\Leftrightarrow d=i(a-b)+b\Leftrightarrow d=i(7+2i-4-8i)+4+8i$
$\Leftrightarrow d=i(3-6i)+4+8i\Leftrightarrow d=3i-6i^2+4+8i$
$\Leftrightarrow d=6+4+11i=10+11i$

D'où $d=10+11i$

b) Calculer $\frac{d-c}{b-c}$ et en déduire les points B, C et D sont alignés.

$\frac{d-c}{b-c}=\frac{10+11i+2-5i}{4+8i+2-5i}=\frac{12+6i}{6+3i}$

Donc $\frac{d-c}{b-c}=\frac{2(6+3i)}{6+3i}=2$

On a $\frac{d-c}{b-c}=2$ donc $\frac{d-c}{b-c}\in\mathbb{R}$ donc les points B, C et D sont alignés.

<u>Exercice 3 :</u> (2013 S1) (3pts)

Une caisse contient 10 boules : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches. (indiscernables au toucher).
On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

1) On considère les deux événements :
A″ Obtenir deux boules rouges et deux boules vertes″
B ″ aucune boule parmi les quatre tirées n'est banche″
Montrer que $P(A)=\frac{1}{7}$ et $P(B)=\frac{1}{3}$

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse
5 R ; 3V ; 2B

$Card(\Omega)=C_{10}^{4}=210$

A″ Obtenir deux boules rouges et deux boules vertes″

$Card(A)=C_5^2\times C_3^2=10\times3=30$

$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$

B ″ aucune boule parmi les quatre tirées n'est banche″

$Card(B)=C_8^4=70$

$P(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{70}{210}=\frac{1}{3}$

D'où $P(A)=\frac{1}{7}$ et $P(B)=\frac{1}{3}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de boules blanches tirées.
a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.
aucune boule parmi les quatre tirées n'est banche donc X = 0.
Parmi les quatre tirées il y a une seule boule blanche donc X = 1
Parmi les quatre tirées il y a deux boules blanches donc X = 2
Et puisque la caisse contient seulement 2 boules blanches.
les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.
b) Montrer que $P(X=1)=\frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$p(X=1)=\frac{C_2^1\times C_8^3}{210}=\frac{2\times56}{210}=\frac{8}{15}$

D'où $p(X=1)=\frac{8}{15}$

$p(X=0)=P(B)=\frac{1}{3}$

$p(X=2)=\frac{C_2^2\times C_8^2}{210}=\frac{1\times28}{210}=\frac{2}{15}$

X = k	0	1	2
P(X=k)	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{8}{15}}$	$\mathbf{\frac{2}{15}}$

$(\mathbf{\frac{1}{3}+\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=1})$

<u>Exercice 3 :</u> (2013 S1) (3pts)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$U_{n+1}=\frac{25}{10-U_n}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $U_1=0$

1) Vérifier que: $5-U_{n+1}=\frac{5(5-U_n)}{5+(5-U)_n}\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Et montrer par récurrence **que:** $5-U_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$5-U_{n+1}=5-\frac{25}{10-U_n}=\frac{50-5U_n-25}{10-U_n}$

$5-U_{n+1}=\frac{25-5U_n}{5+5-U_n}=\frac{5(5-U_n)}{5+5-U_n}$

D'où $5-U_{n+1}=\frac{5(5-U_n)}{5+5-U_n}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Montrer que : $5-U_n>0\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Pour n = 1 on a $U_1=0$ donc $5-U_1>0$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ supposons que $5-U_n>0$ et montrons que $5-U_{n+1}>0$

On a $5-U_n>0$ donc $5(5-U_n)>0$
et $5+5-U_n>5$ donc

$5-U_{n+1}=\frac{5(5-U_n)}{5+5-U_n}>0$

D'où $5-U_n>0\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) On pose $V_n = \frac{5}{5-U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $V_{n+1} = \frac{10-U_n}{5-U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ puis vérifier que $V_{n+1} - V_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

On a $V_n = \frac{5}{5-U_n}$ donc $V_{n+1} = \frac{5}{5-U_{n+1}}$

$$V_{n+1} = \frac{5}{5 - \frac{5(5-U_n)}{5+5-U_n}} = \frac{10-U_n}{5-U_n}$$

D'où $V_{n+1} = \frac{10-U_n}{5-U_n}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{10-U_n}{5-U_n} - \frac{5}{5-U_n} = \frac{5-U_n}{5-U_n} = 1$$

D'où $V_{n+1} - V_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Montrer que : $V_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que : $U_n = 5 - \frac{5}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

on a $V_{n+1} - V_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ donc $(V_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme

$V_1 = \frac{5}{5-U_1} = \frac{5}{5-0} = 1$ donc $V_1 = 1$

Donc $V_n = V_1 + (n-1)\times 1 = 1 + n - 1 = n$

D'où $V_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

On a $V_n = \frac{5}{5-U_n}$ donc

$$5 - U_n = \frac{5}{V_n} \Leftrightarrow 5 - \frac{5}{V_n} = U_n$$

D'où $U_n = 5 - \frac{5}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) Déterminer $\lim U_n$

$\lim U_n = \lim 5 - \frac{5}{n} = 5$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$

D'où $\lim U_n = 5$

<u>Problème :</u>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-2)^2 e^x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a – Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat géométriquement.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-2)^2 e^x = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2 e^x}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (x-2)^2 \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de + ∞ de direction l'axe des ordonnées.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-2)^2 e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 4x + 4) e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x = 0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale au voisinage de – ∞

2) a) Montrer que $f'(x) = x(x-2)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (x-2)^2 e^x$$

$$f'(x) = 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x$$

$$f'(x) = (x-2)e^x(2 + x - 2) = x(x-2)e^x$$

D'où $f'(x) = x(x-2)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Montrer que f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$ et est décroissante sur $[0;2]$

On a $f'(x) = x(x-2)e^x \quad e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x-2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

X	– ∞		0		2		+ ∞
x(x – 2)		+	0	–	0	+	

$\forall x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[\quad f'(x) \geq 0$

Donc f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$

$\forall x \in [0;2] \quad f'(x) \leq 0$

Donc f est décroissante sur $[0;2]$

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur ℝ.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	0	+	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

3) a) Montrer que $\mathbf{f''(x) = (x^2-2)e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Et en déduire que (C_f) admet deux points d'inflexions (les ordonnées des points ne sont pas demandées)

On a $\mathbf{f'(x) = x(x-2)e^x}$ donc $\mathbf{f'(x) = (x^2-2x)e^x}$

$$\mathbf{f''(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x}$$

$$\mathbf{f''(x) = (2x-2+x^2-2x)e^x = (x^2-2)e^x}$$

D'où $\mathbf{f''(x) = (x^2-2)e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

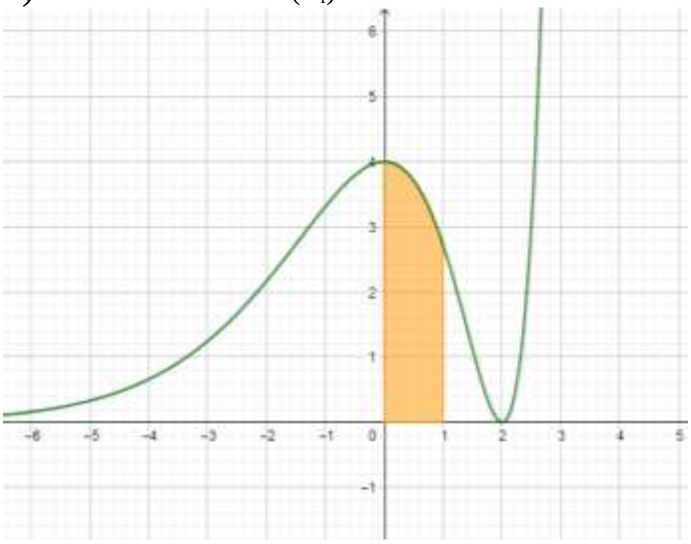
Donc le signe de $\mathbf{f''(x)}$ est celui de $\mathbf{(x^2-2)}$

$$\mathbf{f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-2) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\mathbf{f''(x)}$		+	0	$-$	0	+	

D'où (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses respectifs $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$

b) Construire la courbe (C_f).



4)) a – Montrer que $\mathbf{H : x \to (x-1)e^x}$ est une primitive de $\mathbf{h : x \to xe^x}$ sur ℝ Puis calculer $\int_0^1 \mathbf{xe^x dx}$

$$\mathbf{H(x) = (x-1)e^x}$$

$$\mathbf{H'(x) = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)'}$$

$$\mathbf{H'(x) = e^x + (x-1)e^x = (1+x-1)e^x = xe^x}$$

$$\mathbf{H'(x) = h(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'où $\mathbf{H : x \to (x-1)e^x}$ est une primitive de $\mathbf{h : x \to xe^x}$ sur ℝ

$$\int_0^1 \mathbf{xe^x dx} = \int_0^1 \mathbf{h(x)dx} = [\mathbf{H(x)}]_0^1$$

$$\int_0^1 \mathbf{xe^x dx} = \mathbf{H}(1) - \mathbf{H}(0) = 0 - (-1)e^0 = 1$$

D'où $\int_0^1 \mathbf{xe^x dx} = 1$

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que: $\int_0^1 \mathbf{x^2e^x dx} = \mathbf{e} - 2$

$\mathbf{u(x) = x^2}$ $\qquad$ $\mathbf{u'(x) = 2x}$

$\mathbf{v'(x) = e^x}$ $\qquad$ $\mathbf{v(x) = e^x}$

$$\int_0^1 \mathbf{x^2e^x dx} = \left[\mathbf{x^2e^x}\right]_0^1 - \int_0^1 2\mathbf{xe^x dx}$$

$$\int_0^1 \mathbf{x^2e^x dx} = \mathbf{e} - 2\int_0^1 \mathbf{xe^x dx} = \mathbf{e} - 2$$

D'où $\int_0^1 \mathbf{x^2e^x dx} = \mathbf{e} - 2$

c- Montrer que l'aire du domaine limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1 est $5(e-2)\,cm^2$.

$$\mathbf{A} = \left(\int_0^1 \mathbf{f(x)dx}\right)\mathbf{cm^2}$$

$$\int_0^1 \mathbf{f(x)dx} = \int_0^1 \mathbf{(x-2)^2e^x dx} = \int_0^1 \mathbf{(x^2-4x+4)e^x dx}$$

$$\int_0^1 \mathbf{f(x)dx} = \int_0^1 \mathbf{x^2e^x dx} - 4\int_0^1 \mathbf{xe^x dx} + 4\int_0^1 \mathbf{e^x dx}$$

$$\int_0^1 \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{e} - 2 - 4 + 4\left[\mathbf{e^x}\right]_0^1 = \mathbf{e} - 6 + 4(\mathbf{e} - 1)$$

$$\int_0^1 \mathbf{f(x)dx} = 5\mathbf{e} - 10 = 5(\mathbf{e} - 2)$$

D'où $\mathbf{A = 5(e-2)cm^2}$

5) Utiliser la courbe (C_f) pour donner le nombre des solutions de l'équation $\mathbf{x^2 = e^{-x} + 4x - 4}$; x∈ℝ

$$\mathbf{x^2 - 4x + 4 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow (x-2)e^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1}$$

Le nombre des solutions de l'équation f(x) = 1 est égale aux nombre de point d'intersection entre la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation y = 1

La droite (D) coupe la courbe (C_f) en 3 points d'où L'équation f(x) = 1 admet 3 solutions