

## EXERCICES

## Limites et asymptotes et études de fonctions

### Construire avec un tableau de variation

Pour les exercices de 1 à 4, utiliser le tableau de variations pour trouver le domaine de définition, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et les asymptotes éventuelles. Construire ensuite une courbe susceptible de représenter la fonction  $f$  en commençant par tracer les asymptotes et les tangentes horizontales.

#### EXERCICE 1

$x$	$-\infty$		$0$		$+\infty$
$f'(x)$	-			+	
$f(x)$	2		$-\infty$	$-\infty$	0

#### EXERCICE 2

$x$	$-\infty$		$-1$		$1$		$+\infty$
$f'(x)$	+			-		+	
$f(x)$	$-\infty$		2		0		1

#### EXERCICE 3

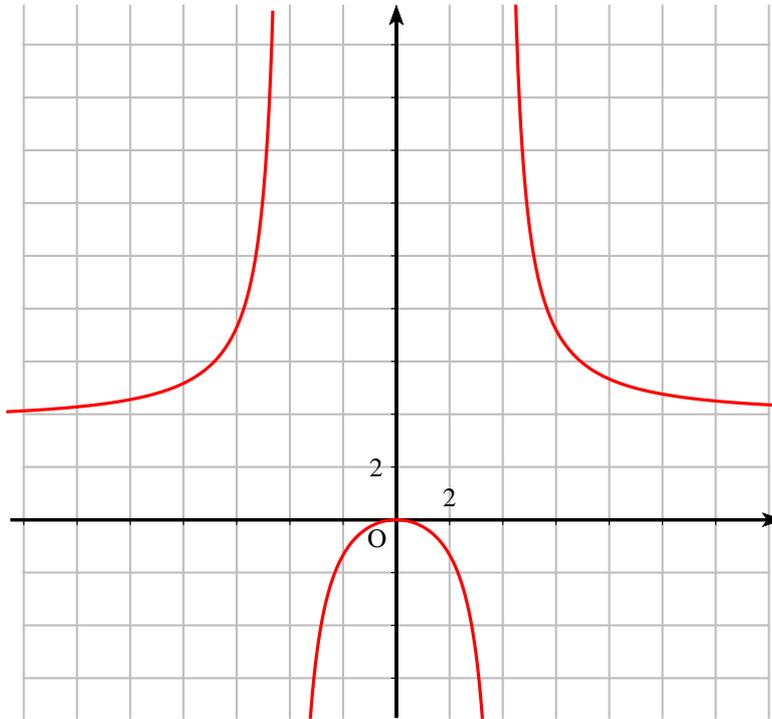
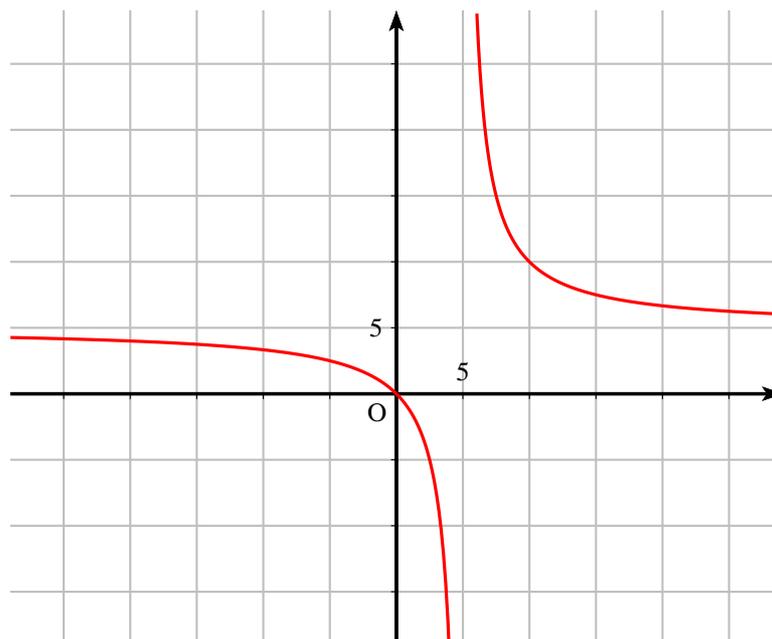
$x$	$-\infty$		$-2$		$-1$		$0$		$+\infty$
$f'(x)$	-			+			-		+
$f(x)$	2		$-\infty$		4		$-\infty$		2

#### EXERCICE 4

$x$	$-\infty$		$-2$		$1$		$4$		$+\infty$
$f'(x)$	+			+			-		+
$f(x)$	$-\infty$		2		3		$-\infty$		4

**Retrouver un tableau de variation**

Pour les courbes suivantes, exercices 5 et 6, déterminer l'ensemble de définition, les limites aux bornes de cet ensemble de définition puis dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  représentée. Quelles asymptotes pouvez-vous conjecturer ? Donner une expression d'une fonction  $f$  qui correspondrait à la courbe tracée ? Vérifier sur votre calculatrice.

**EXERCICE 5****EXERCICE 6**

**Théorème sur les limites****EXERCICES****EXERCICE 7**

Étudier les limites en  $a$  de la fonction indiquée. Il peut être nécessaire d'étudier la limite à droite et la limite à gauche en  $a$ .

1)  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$ ;  $a = 1$

3)  $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x - 6}$ ;  $a = 2$

2)  $f(x) = \frac{x^3}{2x - 1}$ ;  $a = \frac{1}{2}$

4)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ ;  $a = -1$

**EXERCICE 8**

Étudier les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  des fonctions  $f$  suivantes :

1)  $f(x) = 3x^2 + 1$

6)  $f(x) = \frac{2x + 6}{3 - x}$

2)  $f(x) = x^3 + x^2 - 1$

7)  $f(x) = \frac{x^2 + 12}{x^2 - 8}$

3)  $f(x) = 2 - x - x^2$

8)  $f(x) = \frac{x^3 - x + 5}{3x^2 - 2x + 1}$

4)  $f(x) = -5x^3 + x - 2$

9)  $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

5)  $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 2}$

**Formes indéterminées****EXERCICE 9**

Pour les exercices suivants, étudier la limite de la fonction  $f$  au point indiqué.

1)  $f(x) = \frac{(x - 1)(2x + 3)}{x^2 - 1}$  en 1.

3)  $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x^2 - x}$  en 0.

2)  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$  en 2.

4)  $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$  en 1.

**Études de fonctions****EXERCICE 10**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$

1) Étudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Que peut-on en conclure pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?

2) Calculer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ . On cherchera à factoriser  $f'$ .

3) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

4) Déterminer une équation de la tangente  $T_0$  à  $\mathcal{C}_f$  en 0.

5) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ ,  $T_0$  ainsi que les asymptotes éventuelles. On marquera les extremum de la fonction  $f$ . Unités : 1 cm sur les abscisses et 2 cm sur les ordonnées.

6) La courbe  $\mathcal{C}_f$  semble symétrique par rapport à l'origine. Confirmer cette conjecture.

**EXERCICE 11**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

- 1) Étudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Que peut-on en conclure pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?
- 2) Calculer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .
- 3) Résoudre  $f'(x) = 0$ .
- 4) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ . On donnera la valeur des extremum à  $10^{-2}$  près.
- 5) Déterminer une équation de la tangente  $T_0$  à  $\mathcal{C}_f$  en 0.
- 6)  $T_0$  coupe la courbe  $\mathcal{C}_f$  en un autre point. Déterminer ce point.
- 7) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ ,  $T_0$  ainsi que les asymptotes éventuelles. On marquera les extremum de la fonction  $f$ . Unités : 1 cm sur les abscisses et 2 cm sur les ordonnées.

**EXERCICE 12**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  par :  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$

- 1) Étudier les limites de  $f$  en 2,  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
Que peut-on en conclure pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?
- 2) Calculer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ . On cherchera à factoriser  $f'$ .
- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 4) Déterminer une équation de la tangente  $T_1$  à  $\mathcal{C}_f$  en 1.
- 5) La courbe  $\mathcal{C}_f$  coupe une de ses asymptote en  $x_0$ . Déterminer  $x_0$ .
- 6) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ ,  $T_1$  ainsi que les asymptotes éventuelles. On marquera les extremum de la fonction  $f$ . Unités : 1 cm sur les deux axes.

**EXERCICE 13**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^* - \{2\}$  par :  $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x(x - 3)}$

- 1) Étudier les limites de  $f$  en 0, 3,  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
Que peut-on en conclure pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?
- 2) Calculer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ . On cherchera à factoriser  $f'$ .
- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 4) Déterminer une équation de la tangente  $T_2$  à  $\mathcal{C}_f$  en 2.
- 5) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ ,  $T_2$  ainsi que les asymptotes éventuelles. On marquera les extremum de la fonction  $f$ . Unités : 1 cm sur les deux axes.
- 6) La courbe  $\mathcal{C}_f$  coupe une de ses asymptote en  $x_0$ . Déterminer  $x_0$ .

**EXERCICE 14****Asymptote oblique**

$f$  et  $g$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R} - \{-2\}$  par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + x + 3}{2(x + 2)} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

- 1) Tracer dans une même fenêtre de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ . Qu'observe-t-on pour les grande valeurs de  $x$  ?
- 2) Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-2\}$  par :  $h(x) = g(x) - f(x)$ 
  - a) Déterminer l'expression de la fonction  $h$
  - b) En déduire la limite de  $h(x)$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
  - c) Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .
- 3) On considère l'algorithme ci-contre
  - a) Expliquer le rôle de cet algorithme.
  - b) Quelle valeur de  $x$ , l'algorithme affiche-t-il lorsque l'on saisit  $a = 0,01$  ?

**Variables :**  $x$  : entier  $a$  : réel

**Entrées et initialisation**

| Lire  $a$  réel positif proche de 0  
|  $x$  prend la valeur  $-1$

**Traitement**

| **tant que**  $\frac{3}{2(x+2)} > a$  **faire**

| |  $x$  prend la valeur  $x + 1$

| **fin**

**Sorties :** Afficher  $x$