EXERCICES D'ÉTUDE

EX 1

Soit f la fonction définie par : $f(x)=1+\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}$ et (C_f) sa courbe dans un R.O.N $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Etudier la dérivabilité de f en $x_0=0$
2. Etudie les branches infinies de la courbe (C_f)
3. a) montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^+ : f'(x)=\dfrac{x(3+x^2)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

   b) dresser le tableau de variation de f

   c) montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^+ : f''(x)=\dfrac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ puis déterminer le point d'inflexion de (C_f)
4. a) étudier la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $(D)\quad y=x$

   b) tracer la courbe (C_f)

5. soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0=\dfrac{1}{2}$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

   a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\le U_n\le 1$

   b) montrer que la suite $(U_n)_n$ est décroissante

EX 2

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-1$

1) a) déterminer le domaine de f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

   b) donner une interprétation des résultats

2) a) montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

   b) dresser le tableau de variation de f

3) a) déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0=0$

   b) vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)-x=\dfrac{-x^2(x+1)}{\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}$

   c) étudier la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $(D)\quad y=x$

4) tracer la courbe (C_f) et la droite $y=x$

5) soit $(U_n)_n$ la suite telle que : $U_0=-\dfrac{3}{4}$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

   a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad -1<U_n<0$

   b) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

   c) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ |U_{n+1}+1|\le\dfrac{4}{5}|U_n+1|$

   d) en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\ |U_n+1|\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$