Limites et comportement asymptotique

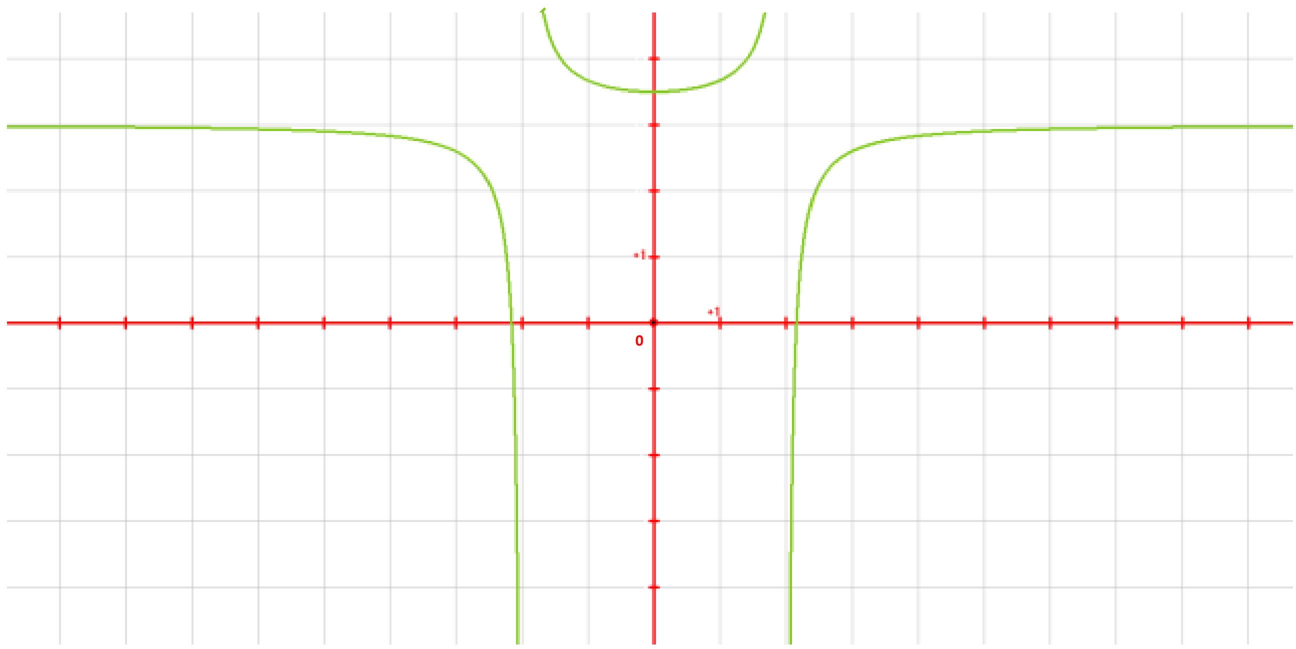
Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1 :** détermination graphique d'une limite et d'une équation d'asymptote à une courbe (asymptote verticale et asymptote horizontale)
- **Exercice 2 :** étude de limites, asymptotes verticales et horizontales
- **Exercice 3 :** étude de limites de fonctions composées, formes indéterminées, expression conjuguée, asymptotes horizontales
- **Exercice 4 :** limites aux bornes d'un ensemble de définition, asymptote oblique
- **Exercice 5 :** asymptotes parallèles aux axes d'un repère, équation d'asymptote oblique

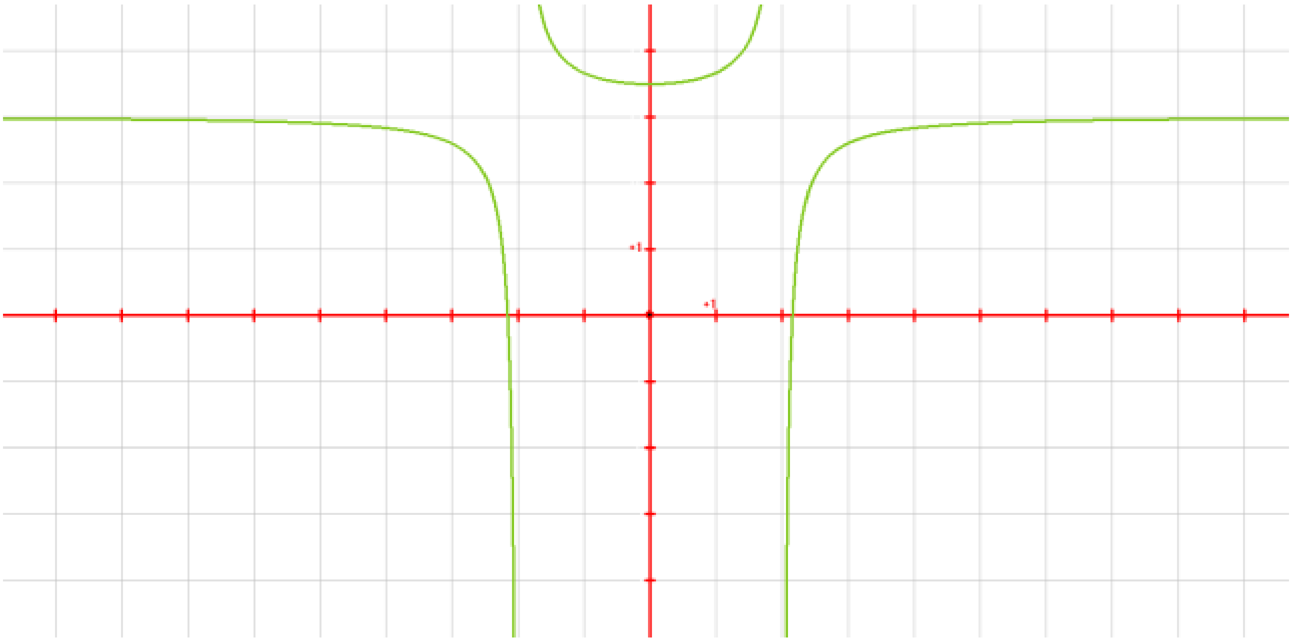
Exercice 1 *(2 questions)* — *Niveau : facile*

On a tracé ci-dessous en vert C_f, la courbe représentative d'une fonction f. Déterminer graphiquement D_f, l'ensemble de définition de f, puis une équation de chacune des asymptotes à C_f.



Correction de l'exercice 1

1) Ci-dessous est tracée en vert C_f, la courbe représentative d'une fonction f.



$\boxed{D_f =]-\infty\,;\,-2 \;\cup\; -2\,;2 \;\cup\; 2\,;\,+\infty}$

Rappel : Continuité d'une fonction

Soient I un intervalle, f une fonction définie (au moins) sur I et a un réel tel que $a \in I$.

- **Continuité en un point :** f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a égale à $f(a)$:

C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et en particulier $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

- **Continuité sur un intervalle :** f est continue sur I si f est continue en tout point a de I.

Graphiquement, on lit : $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ donc f n'est pas continue en -2.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ donc f n'est pas continue en 2.

Remarque – Notation :

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x<2}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>2}} f(x)$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

désigne la limite à gauche de f en a

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

désigne la limite à droite de f en a

2)

Rappel : Asymptotes à une courbe

- **Asymptote horizontale :**

Soit a un réel.
Si

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

Alors la courbe représentative de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = a$ en $-\infty$.

Si

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a$$

Alors la courbe représentative de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = a$ en $+\infty$.

- **Asymptote verticale :**

Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

ou si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

ou si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Alors la courbe représentative de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

- **Asymptote oblique :**

Soit a un réel non nul et b un réel.
Si

$$\lim_{x\to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

ou si

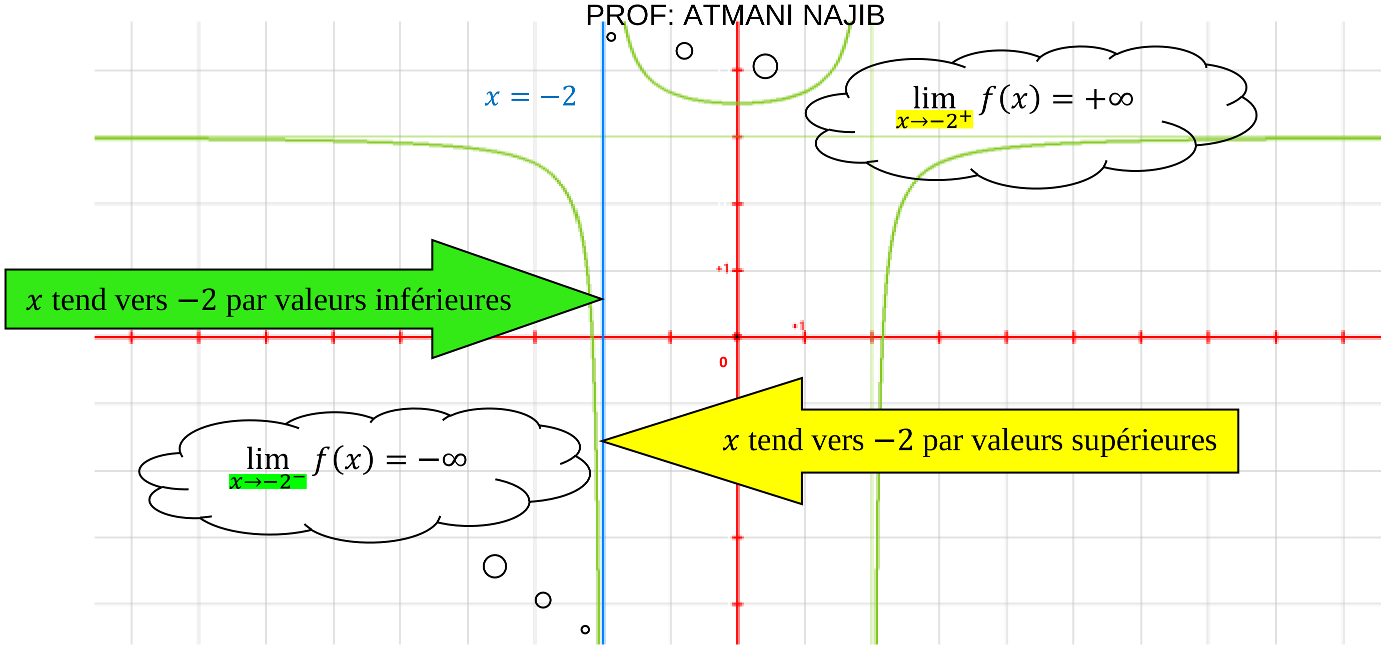
$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Alors la courbe représentative de f admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.

Graphiquement, on lit :

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$$

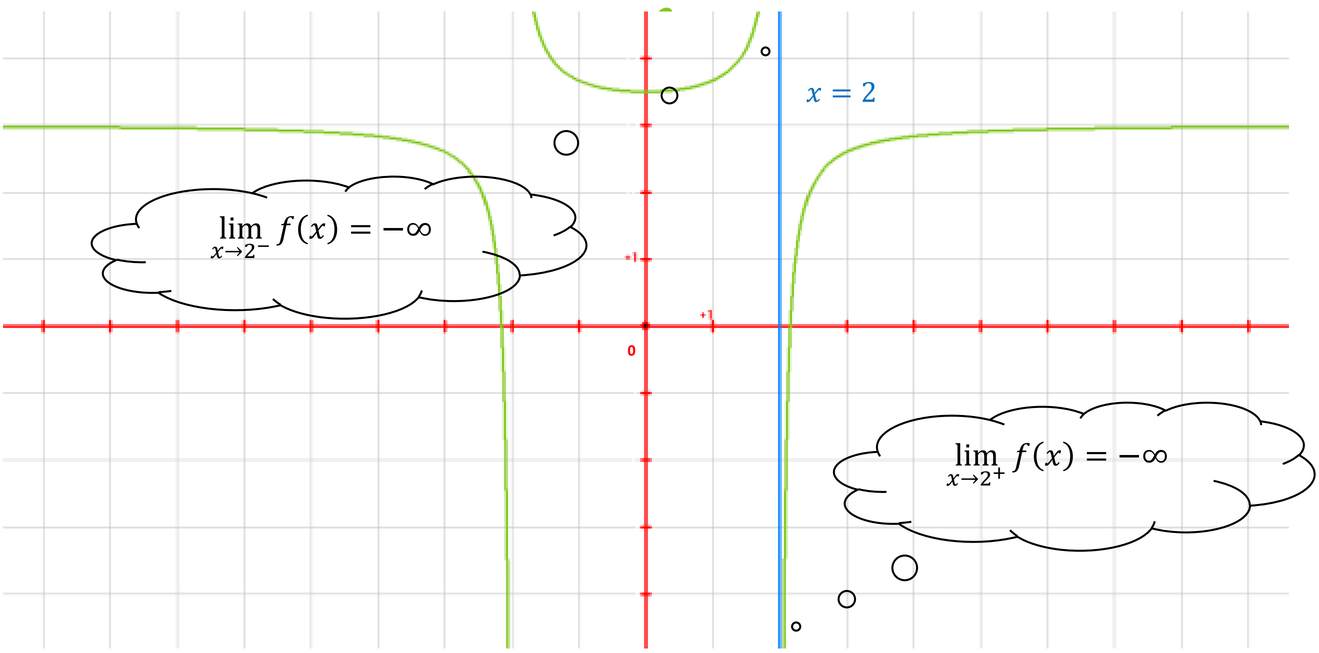
Donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à C_f.



Par ailleurs,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

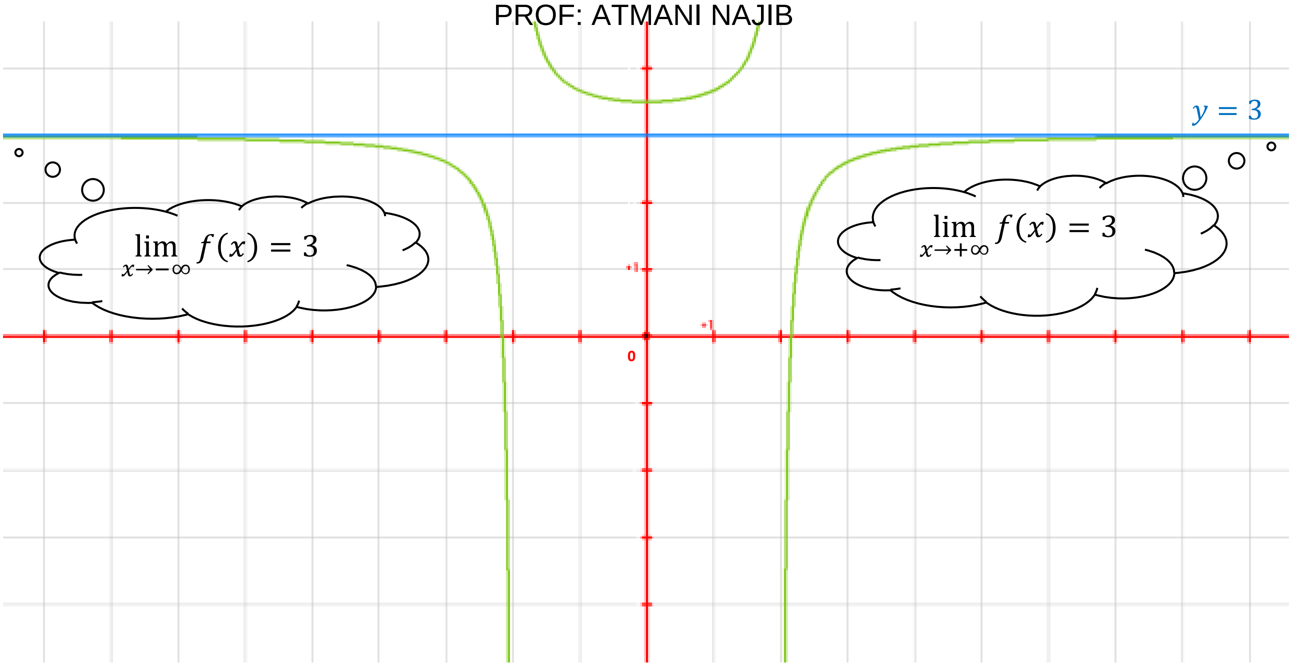
Donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à C_f



Enfin,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$$

Donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$ et en $+\infty$.



Exercice 2 *(2 questions)* — *Niveau : facile*

Déterminer les limites suivantes et en déduire la présence d'une éventuelle asymptote.

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{3}{x+2} \qquad \lim_{x\to3^+} \frac{-5x}{x-3} \qquad \lim_{x\to1^-} \left(\frac{1}{x-1} + 3x + 2\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x-7} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{-x^3+2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-x+7}{x^2-2}$$

Correction de l'exercice 2

Remarque préalable : Le verbe « déduire » signifie « partir de propositions prises pour prémisses ». Il s'agit donc d'utiliser le résultat de l'étude d'une limite pour conclure la présence ou non d'une asymptote.

1) Déterminons $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{3}{x+2}$

$$\lim_{x\to-2^-} x+2 = 0^-$$

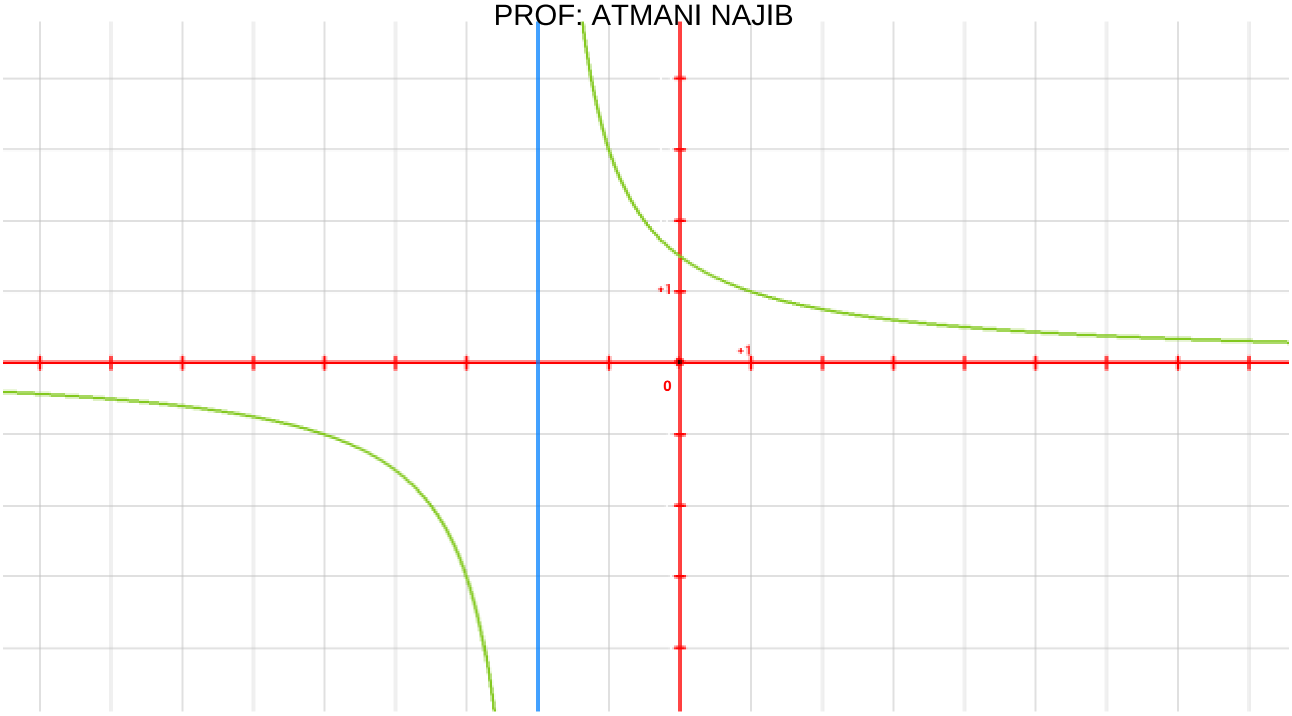
Si $X = x+2$, alors :

$$\lim_{x\to-2^-} X = 0^-$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{3}{x+2} = \lim_{X\to0^-} \frac{3}{X} = -\infty$$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{x+2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$ (représentée ci-dessous en bleu).



Remarque :

$$\lim_{x \to -2^+} x + 2 = 0^+$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{3}{x+2} = \lim_{X \to 0^+} \frac{3}{X} = +\infty$$

Cette étude de limite aurait également permis d'établir que la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{x+2}$ admet une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = -2}$ (représentée ci-dessus en bleu).

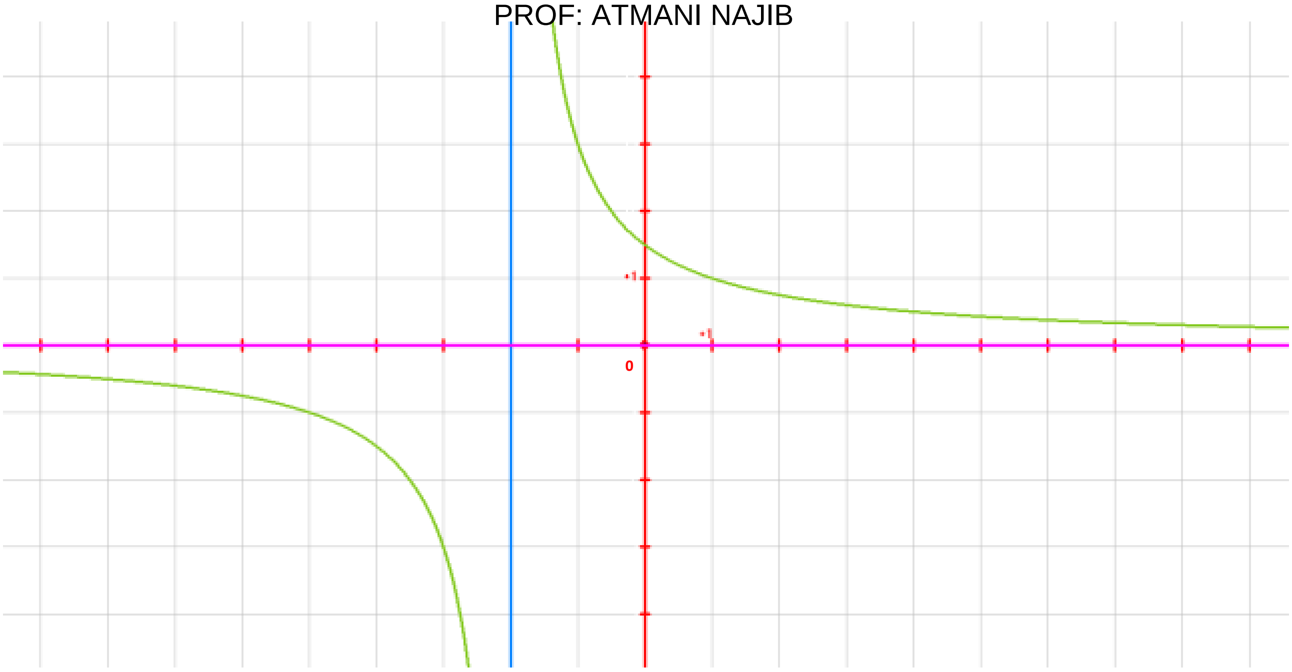
Autre remarque : La courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{x+2}$ admet également une asymptote horizontale (représentée ci-dessous en rose) d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$. En effet,

$$\lim_{x \to +\infty} x + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x+2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{3}{X} = 0^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} x + 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x+2} = \lim_{X \to -\infty} \frac{3}{X} = 0^-$$



2) Déterminons $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{-5x}{x-3}$

$$\lim_{x \to 3^+} x - 3 = 0^+$$

Et

$$\lim_{x \to 3^+} -5x = -15$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{-5x}{x-3} = \lim_{X \to 0^+} \frac{-15}{X} = -\infty$$

Donc la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{-5x}{x-3}$ admet une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 3}$.

Remarque : On aurait également pu montrer la présence d'une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 3}$ à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{-5x}{x-3}$ en montrant que :

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{-5x}{x-3} = \lim_{X \to 0^-} \frac{-15}{X} = +\infty$$

Autre remarque : La courbe représentative de cette fonction admet également une asymptote horizontale d'équaion $y = -5$ en $-\infty$ et en $+\infty$. En effet, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-5x}{x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5x}{x} = -5$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-5x}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x}{x} = -5$$

Rappel : Soient $a_n \in \mathbb{R}^*$, $b_m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

La **limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle** f définie par : $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ est égale à la limite en $\pm\infty$ du quotient de ses monômes de plus haut degré $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

3) Déterminons $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}+3x+2\right)$

$$\lim_{x\to 1^-} x-1=0^-$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\lim_{X\to 0^-}\frac{1}{X}=-\infty$$

Et

$$\lim_{x\to 1^-} 3x+2=5$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}+3x+2\right)=-\infty$$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction $f: x\mapsto \frac{1}{x-1}+3x+2$ admet une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x=1}$.

Remarque : On pouvait également montrer la présence d'une asymptote verticale d'équation $x=3$ en étudiant

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}+3x+2\right)=+\infty$$

Autre remarque : La courbe représentative de cette fonction admet également une asymptote oblique d'équation $y=3x+2$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. En effet,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{x-1}+3x+2\right)-(3x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-1}+3x+2-3x-2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{x-1}+3x+2\right)-(3x+2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-1}+3x+2-3x-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=\lim_{X\to-\infty}\frac{1}{X}=0^-$$

4) Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x-7}$

D'après le théorème sur les limites des fonctions rationnelles en l'infini,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x-7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$$

Donc C_f, la courbe représentative de la fonction $f: x\mapsto\frac{2x+3}{x-7}$, admet une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y=2}$ au voisinage de $-\infty$.

Remarques :

- On montre également que la droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.
- C_f admet également une asymptote verticale d'équation $x=7$.

5) Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x+1}{-x^3+2}$

D'après le théorème sur les limites des fonctions rationnelles en l'infini,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{-x^3+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0^-$$

Il résulte de cette étude de limite que la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-x+1}{-x^3+2}$ $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 0}$.

Remarque : La courbe représentative de cette fonction admet également une asymptote verticale d'équation $x = 2^{1/3}$.

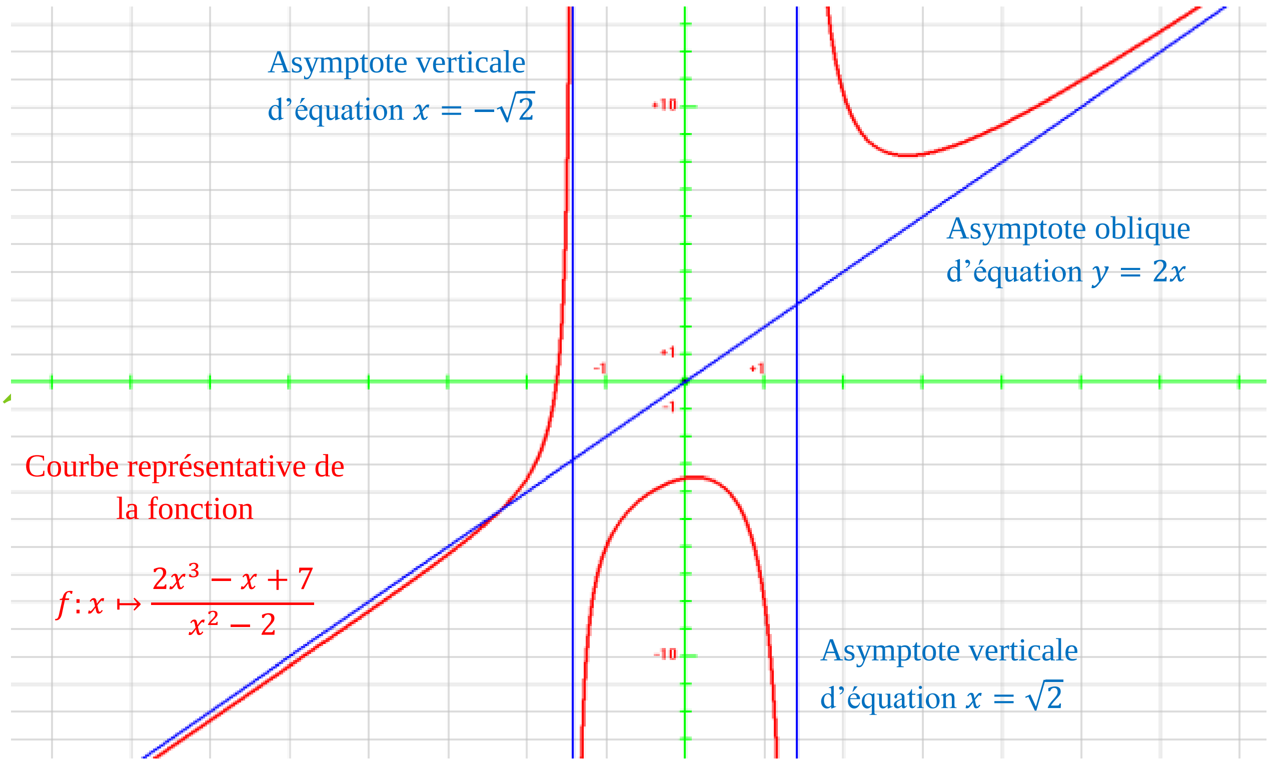
6) Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-x+7}{x^2-2}$

D'après le théorème sur les limites des fonctions rationnelles en l'infini,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-x+7}{x^2-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2} \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

Donc la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^3-x+7}{x^2-2}$ n'admet $\boxed{\text{pas d'asymptote horizontale}}$.

Remarque : La courbe représentative de cette fonction admet en revanche deux asymptotes verticales d'équation respective $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$, ainsi qu'une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.



Exercice 3 ***(2 questions)*** ***Niveau : moyen***

Déterminer la limite de chacune des fonctions suivantes puis en déduire si la courbe représentative de la fonction admet une asymptote.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-6}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2+x-1}{5x^2-2x+7}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+7}}$$

Correction de l'exercice 3

Rappel : Limite d'une fonction composée de deux fonctions

Soit u une fonction définie sur un intervalle J, soit v une fonction définie sur un intervalle I, telle que $v(x) \in J$. La fonction f définie sur I telle que $f(x) = u(v(x))$ (ou $f(x) = (u \circ v)(x)$) est la fonction composée de la fonction v suivie de la fonction u.

a, b et c désignent chacun soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si

$$\lim_{x\to a} v(x) = b$$

Et si

$$\lim_{X\to b} u(X) = c$$

Alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

1) Déterminons $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-6}\right)$

Remarquons tout d'abord que la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est la composée, définie sur $[-1\,;\,+\infty[$, de la fonction $x \mapsto x+1$ suivie de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

D'une part,

$$\lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$$

Et

$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to+\infty} x-6 = +\infty$$

Et

$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-6} = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Donc, par différence, on aboutit à une forme indéterminée (FI) de la forme $\infty - \infty$; en effet :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}\right) = "\infty - \infty"\ (FI)$$

Pour lever l'indétermination, il convient de transformer l'expression $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}$. Pour cela, on la multiplie par son expression conjuguée, afin de mettre en évidence la forme factorisée $(A-B)(A+B)$ de l'identité remarquable $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$. L'expression $(A-B)$ est dite « l'expression conjuguée » de $(A+B)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}\right)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-6}^2\right)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x+1-(x-6)\right)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1-x+6)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}\right)}$$

Or, d'après ce qui précède,

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-6} = +\infty \end{cases}$$

D'où, par somme,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}\right) = +\infty$$

Donc, par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{7}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}\right)} = \lim_{X\to+\infty} \frac{7}{X} = 0^+}$$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}$ admet une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 0 \text{ au voisinage de } +\infty}$.

2) Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2 + x - 1}{5x^2 - 2x + 7}}$

D'une part,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{5x^2 - 2x + 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

D'où, par composition,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 + x - 1}{5x^2 - 2x + 7}} = \sqrt{\frac{2}{5}}}$$

Par conséquent, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2x^2+x-1}{5x^2-2x+7}}$ admet une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ au voisinage de } +\infty}$.

Remarque : On peut également montrer que la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2x^2+x-1}{5x^2-2x+7}}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{\frac{2}{5}}$ au voisinage de $-\infty$.

3) Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7}}$

D'une part,

$$\lim_{x \to +\infty} 2x - 3 = +\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x-3} = \lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x \to +\infty} 2x + 7 = +\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x+7} = \lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Donc on aboutit à une forme indéterminée :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7}\right) = "\infty - \infty" \; (forme\ indéterminée)$$

Pour lever l'indétermination, il convient de transformer l'expression $\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+7}$. Pour cela, on la multiplie par son expression conjuguée.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+7}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+7}\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{\sqrt{2x-3}^2-\sqrt{2x+7}^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{2x-3-(2x+7)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{-10}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{5}$$

D'après ce qui précède,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}=+\infty$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+7}=+\infty$$

D'où, par somme,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)=+\infty$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{5}=\lim_{X\to+\infty}\frac{3X}{5}=+\infty}$$

Par conséquent, la courbe représentative de la fonction $f:x\mapsto\frac{-6}{\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+7}}$ n'admet pas d'asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

Rappel : Formes indéterminées

Les cas de formes indéterminées (FI) nécessitent une étude particulière. Ces cas sont, pour les opérations élémentaires $(+\ ;\ -\ ;\ \times\ ;\ \div)$, au nombre de 4 et de la forme :

$\infty-\infty$ $\qquad$ $0\times\infty$ $\qquad$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\qquad$ $\frac{0}{0}$

Exercice 4 *(4 questions)* ***Niveau : facile***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x)=4-x-\dfrac{2}{(x+1)^2}$

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les asymptotes éventuelles.
2) Montrer que C_f, la courbe représentative de f, admet la droite d'équation $y=4-x$ comme asymptote oblique.
3) Tracer C_f et ses asymptotes afin de contrôler les résultats obtenus aux questions précédentes.

Correction de l'exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x)=4-x-\dfrac{2}{(x+1)^2}$

1) Etudions les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]-1\,;\,+\infty[$. Donc il convient d'étudier les limites en $-\infty$, -1^-, -1^+ et $+\infty$.

- Etude en $-\infty$:

D'une part,

$$\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$$

D'où

$$\lim_{x\to-\infty} 4-x=+\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to-\infty} x+1=-\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2=\lim_{X\to-\infty}X^2=+\infty$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{(x+1)^2}=\lim_{X'\to-\infty}\frac{2}{X'}=0^+$$

D'où

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{(x+1)^2}\right)=0^-$$

Donc, par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(4-x-\frac{2}{(x+1)^2}\right)=+\infty}$$

Donc C_f, la courbe représentative de f, n'admet $\boxed{\text{pas d'asymptote horizontale au voisinage de } -\infty}$

- <u>Etude en -1^- :</u>

D'une part,

$$\lim_{x\to-1^-}4-x=5$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to-1^-}x+1=0^-$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x\to-1^-}(x+1)^2=\lim_{X\to0^-}X^2=0^+$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{2}{(x+1)^2}=\lim_{X'\to0^+}\frac{2}{X'}=+\infty$$

D'où

$$\lim_{x\to-1^-}\left(-\frac{2}{(x+1)^2}\right)=-\infty$$

Donc, par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to-1^-}\left(4-x-\frac{2}{(x+1)^2}\right)=-\infty}$$

Donc C_f, la courbe représentative de f, admet la $\boxed{\text{droite } (d_1) \text{ d'équation } x=-1 \text{ comme asymptote verticale}}$.

- Etude en -1^+ :

D'une part,

$$\lim_{x\to -1^+} 4 - x = 5$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to -1^+} x + 1 = 0^+$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x\to -1^+} (x+1)^2 = \lim_{X\to 0^+} X^2 = 0^+$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2}{(x+1)^2} = \lim_{X'\to 0^+} \frac{2}{X'} = +\infty$$

D'où

$$\lim_{x\to -1^+} \left(-\frac{2}{(x+1)^2}\right) = -\infty$$

Donc, par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to -1^+} \left(4 - x - \frac{2}{(x+1)^2}\right) = -\infty}$$

Donc C_f, la courbe représentative de f, admet la $\boxed{\text{droite } (d_1) \text{ d'équation } x = -1 \text{ comme asymptote verticale}}$. (résultat déjà obtenu ci-dessus)

- Etude en $+\infty$:

D'une part,

$$\lim_{x\to +\infty} -x = -\infty$$

D'où, par somme,

$$\lim_{x\to +\infty} 4 - x = -\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to +\infty} x + 1 = +\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x\to +\infty} (x+1)^2 = \lim_{X\to +\infty} X^2 = +\infty$$

D’où, par quotient,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(x+1)^2}=\lim_{X'\to+\infty}\frac{2}{X'}=0^+$$

D’où

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{(x+1)^2}\right)=0^-$$

Donc, par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(4-x-\frac{2}{(x+1)^2}\right)=-\infty}$$

Donc C_f, la courbe représentative de f, n’admet $\boxed{\text{pas d’asymptote horizontale au voisinage de } +\infty}$

2) Montrons que C_f admet la droite d’équation $y=4-x$ comme asymptote oblique.

Pour tout $x\in D_f$,

$$f(x)-(4-x)=4-x-\frac{2}{(x+1)^2}-(4-x)=-\frac{2}{(x+1)^2}$$

Or, d’après la question précédente,

$$\lim_{x\to+\infty}\quad-\frac{2}{(x+1)^2}\Bigg)=0^-$$

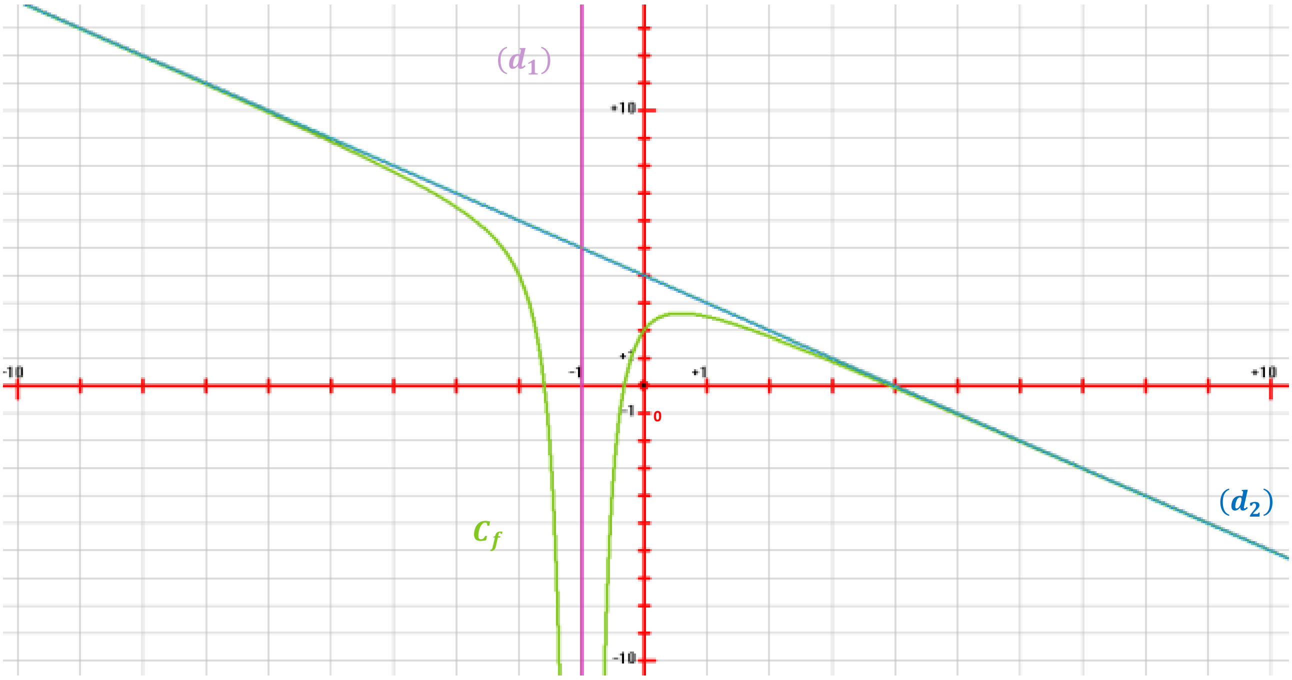
Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(4-x)\big)=0^-}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la droite } (d_2) \text{ d’équation } y=4-x \text{ est asymptote oblique à } C_f \text{ au voisinage de } +\infty}$.

Remarque : On peut également montrer que $\boxed{\text{la droite } (d_2) \text{ d’équation } y=4-x \text{ est asymptote oblique à } C_f \text{ au voisinage de } -\infty}$

3) Traçons C_f (en vert) et ses asymptotes.



D'après le graphique ci-dessus, on constate que les résultats obtenus aux questions précédentes sont conformes.

Exercice 5 *(5 questions)* — *Niveau : moyen*

Soit la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x de D_f,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2 - x}$$

2) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f. En déduire les éventuelles asymptotes à C_f parallèles aux axes du repère.
3) Montrer que C_f admet une asymptote oblique d'équation à préciser.

Correction de l'exercice 5

Soit la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) Déterminons les réels a, b et c tels que, pour tout réel x de D_f,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$$

Pour tout réel x de D_f,

$$ax + b + \frac{c}{2-x} = \frac{(ax+b)(2-x)}{(2-x)} + \frac{c}{2-x} = \frac{2ax - ax^2 + 2b - bx}{2-x} + \frac{c}{2-x} = \frac{2ax - ax^2 + 2b - bx + c}{2-x}$$

$$= \frac{-ax^2 + (2a-b)x + 2b + c}{2-x}$$

Ainsi, on doit obtenir :

$$\frac{-ax^2 + (2a-b)x + 2b + c}{2-x} = \frac{x^2 - 3x + 6}{2-x}$$

Par identification des coefficients (uniques) des monômes du numérateur, on a : $\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = -3 \\ 2b + c = 6 \end{cases}$

Résolvons ce système :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = -3 \\ 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2\times(-1) - b = -3 \\ 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -2 - b = -3 \\ 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -b = -3 + 2 \\ 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -b = -1 \\ 2b + c = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ 2\times 1 + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 6 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$$

Donc, pour tout réel x de D_f,

$$f(x) = -x + 1 + \frac{4}{2-x}$$

2) Déterminons les limites de f aux bornes de D_f afin d'en déduire les éventuelles asymptotes à C_f parallèles aux axes du repère.

Remarque : Les asymptotes parallèles aux axes d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ sont les asymptotes horizontales et verticales. Une asymptote horizontale est parallèle à l'axe $(O\ ;\ \vec{\imath})$ des abscisses ; une asymptote verticale est parallèle à l'axe $(O\ ;\ \vec{\jmath})$ des ordonnées.

La question précédente a permis d'établir que :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{4}{2-x}$$

- Etudions la limite de f en $-\infty$:

D'une part,

$$\lim_{x \to -\infty} -x+1 = +\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x \to -\infty} 2-x = +\infty$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{2-x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{4}{X} = 0^+$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- Etudions la limite de f en 2^- et en 2^+ :

D'une part,

$$\lim_{x \to 2^-} -x+1 = \lim_{x \to 2^+} -x+1 = -1$$

D'autre part,

$$\lim_{x \to 2^-} 2-x = 0^+ \qquad \lim_{x \to 2^+} 2-x = 0^-$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{4}{2-x} = \lim_{X \to 0^+} \frac{4}{X} = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{4}{2-x} = \lim_{X \to 0^-} \frac{4}{X} = -\infty$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

Par conséquent, C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$, parallèle à l'axe des ordonnées.

- Etudions la limite de f en $+\infty$:

D'une part,

$$\lim_{x \to +\infty} -x+1 = -\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x \to +\infty} 2-x = -\infty$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2-x}=\lim_{X\to-\infty}\frac{4}{X}=0^-$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

3) Montrer que C_f admet une asymptote oblique d'équation à préciser.

D'après la question 1), pour tout réel x de D_f,

$$f(x)=-x+1+\frac{4}{2-x}$$

Ainsi, pour tout réel x de D_f,

$$f(x)-(-x+1)=-x+1+\frac{4}{2-x}-(-x+1)=\frac{4}{2-x}$$

Nous avons en outre établi à la question 2) que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2-x}=\lim_{X\to-\infty}\frac{4}{X}=0^-$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+1)]=0^-$$

Par conséquent C_f admet une asymptote oblique d'équation $y=-x+1$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque : On a de surcroît :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{2-x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{4}{X}=0^+$$

C'est-à-dire que C_f admet une asymptote oblique d'équation $y=-x+1$ au voisinage de $-\infty$.