

Ensembles-Applications

**Exercice 1 :**

Soient  $A = \{1,2,3\}$  et  $B = \{0,1,2,3\}$ . Décrire les ensembles  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  et  $A \times B$ .

**Exercice 2 :**

Soient  $A = [1,3]$  et  $B = [2,4]$ . Déterminer  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .

**Exercice 3 :**

1. Déterminer le complémentaire dans  $\mathbb{R}$  des parties suivantes :

$$A_1 = ] - \infty, 0]; A_2 = ] - \infty, 0[; A_3 = ]0, +\infty[; A_4 = [0, +\infty[; A_5 = ]1,2[; A_6 = [1,2[.$$

2. Soient  $A = ] - \infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$ ,  $B = ] - \infty, 1[$  et  $C = [2, +\infty[$ . Comparer les ensembles suivants :

$$C_{\mathbb{R}}A \quad \text{et} \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

**Exercice 4 :**

Soient  $A = ] - \infty, 3]$ ,  $B = ] - 2,7]$  et  $C = ] - 5, +\infty[$  trois parties de  $\mathbb{R}$ .

Déterminer  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $B \cap C$ ,  $B \cup C$ ,  $\mathbb{R} \setminus A$ ,  $A \setminus B$ ,  $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$ ,  $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B))$ ,  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  et  $A \cap (B \cup C)$ .

**Exercice 5 :**

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

1.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**Exercice 6 :**

Soient  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On suppose que :

$$A \cap B \neq \emptyset; A \cup B \neq E; A \not\subseteq B; B \not\subseteq A$$

On pose

$$A_1 = A \cap B; A_2 = A \cap C_E B; A_3 = B \cap C_E A; A_4 = C_E (A \cup B)$$

1. Montrer que  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  sont non vides.
2. Montrer que  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  sont deux à deux disjoints.
3. Montrer que  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$ .

**Exercice 7 :**

1. Déterminer le complémentaire dans  $\mathbb{R}$  des parties suivantes :

$$A_1 = ] - \infty, 0]; A_2 = ] - \infty, 0[; A_3 = ]0, +\infty[; A_4 = [0, +\infty[; A_5 = ]1,2[; A_6 = [1,2[.$$

2. Soient  $A = ] - \infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$ ,  $B = ] - \infty, 1[$  et  $C = [2, +\infty[$ . Comparer les ensembles suivants :

$$C_{\mathbb{R}}A \quad \text{et} \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

**Exercice 8 :**

Justifier les énoncés suivants.

- Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . Si  $A$  est inclus dans  $B$ , alors le complémentaire de  $B$  dans  $E$  est inclus dans le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .
- Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . Si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors tout élément de  $E$  est soit dans  $C_E^A$  soit dans  $C_E^B$ .
- Soient  $E$  un ensemble,  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . Déterminer les ensembles suivants :  
 $C_E(C_E A)$  ;  $A \cap C_E A$  ;  $A \cup C_E A$  ;  $C_E \emptyset$  ;  $C_E E$

**Exercice 9 :**

- Montrer que  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
- Montrer que  $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

**Exercice 10 :**

On rappelle que l'on note

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- Montrer que

$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$$

$$(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$$

- En déduire que

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$$

**Exercice 11 :**

On rappelle que pour toutes parties  $U$  et  $V$  d'un ensemble  $E$ , on note

$$U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

- Montrer que pour toutes parties  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'un ensemble  $E$ .

$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cup C}) = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$

$$(A \cup C) \cap (\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap C \cap \overline{B}$$

- En déduire que

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \overline{A} \cap (B \Delta C)$$

**Exercice 12 :**

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ .

- Que pensez-vous de l'implication

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C) ?$$

Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

- On suppose que l'on a les inclusions suivantes :  $A \cup B \subset A \cup C$  et  $A \cap B \subset A \cap C$ . Montrer que  $B \subset C$ .
- 

**Exercice 13 :**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . Démontrer les égalités suivantes :

- $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

2.  $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$   
 Si  $A \subset B$ , montrer  $C_E B \subset C_E A$

**Exercice 14 :**

Soit  $E$  un ensemble et  $F$  et  $G$  deux parties de  $E$ . Démontrer que :

1.  $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2.  $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$

**Exercice 15 :**

Soit  $E$  un ensemble et soit  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on appelle différence symétrique de  $A$  par  $B$  l'ensemble, noté  $A\Delta B$  défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Montrer que  $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .
2. Calculer  $A\Delta A$ ,  $A\Delta \emptyset$  et  $A\Delta E$ .
3. Montrer que pour tous  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on a :
  - a) Montrer que :  $\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)$
  - b) Montrer que :  $(A\Delta B)\Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (C \cap B \cap A)$
  - c) Montrer que  $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
  - d) A l'aide du b), montrer que  $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$ ,
  - e) En déduire que :  $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

**Exercice 16 :**

Soit  $f: I \rightarrow J$  définie par  $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit injective et surjective.

**Exercice 17 :**

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$	$f: [0,1] \rightarrow [0,2]$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x + x^3$	$x \mapsto x^2 + x^3$	$x \mapsto x + x^4$

**Exercice 18 :**

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  et  $J \subset \mathbb{R}$ , deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f: I \rightarrow J$  une fonction strictement croissante.

1. Montrer que  $f$  est injective.  
 On pourra montrer la contraposée (et on rappelle que  $x_1 \neq x_2$  équivaut à  $x_1 < x_2$  ou  $x_2 < x_1$ )
2. Déterminer l'ensemble  $K$  tel que  $f: I \rightarrow K$  soit bijective.

**Exercice 19 :**

Soit  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  définie pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  par  $f(n, m) = mn$

Soit  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $g(n) = (n, (n + 1)^2)$

1.  $f$  est-elle injective ?
2.  $f$  est-elle surjective ?
3.  $g$  est-elle injective ?
4.  $g$  est-elle surjective ?

**Exercice 20 :**

Soient

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n & n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

Où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$

Les fonctions sont-elles injectives, surjective ? Comparer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

**Exercice 21 :**

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $E$  telle que :

$$f(f(E)) = E$$

Montrer que  $f$  est surjective.

**Exercice 22 :**

On considère l'application  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $f(n) = n^2$

1. Existe-t-il  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$  ?
2. Existe-t-il  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$  ?

**Exercice 23 :**

Soit  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $f(n) = 2n$

1. Existe-t-il une fonction  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$  ?
2. Existe-t-il une fonction  $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $h \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$  ?

**Exercice 24 :**

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application, où  $Card(E) = Card(F)$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- (i)  $f$  est injective
- (ii)  $f$  est surjective
- (iii)  $f$  est bijective

**Exercice 25 :**

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1. Si les applications  $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $v: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  sont bijectives, alors l'application  $u \circ v \circ u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.
2. L'application  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}: (a, b, c) \mapsto 2^a 3^b 5^c$  est une application

- (i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

3. Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ . L'application  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  qui à l'entier  $l \in \mathbb{Z}$  associe le reste de la division euclidienne de  $l$  par  $n$  est une application.
4. bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

5. Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  tels que  $ad - bc = 1$ . Déterminer l'application réciproque de la bijection

$$f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$(u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1)$$

### Exercice 26 :

1. Soient  $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$  et  $q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2. Soit  $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \rightarrow \mathbb{Q}$  l'application définie par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}$$

- a. Montrer que  $f$  est injective ?  
 b.  $f$  est-elle surjective ?

### Exercice 27 :

Soit  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective  $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ .  
 Considérer la partie  $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$ .

### Exercice 28 :

Pour un entier  $n \in \mathbb{N}$  on désigne par  $I_n$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

1. On suppose  $n \geq 2$ . Combien y-a-t-il d'application injectives  $f: I_2 \rightarrow I_n$  ?  
 2. A quelle condition portant sur les entiers  $m$  et  $n$  peut-on définir une application  $f: I_m \rightarrow I_n$  qui soit injective, surjective, bijective ?

### Exercice 29 :

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensemble et soient  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$  deux applications.

1. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont injectives alors  $g \circ f$  est injective.  
 2. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont surjectives alors  $g \circ f$  est surjective.  
 3. Que peut-on conclure sur  $g \circ f$  si  $f$  et  $g$  sont bijectives ?  
 4. Montrer que si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  est injective.  
 5. Montrer que si  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  est surjective.  
 6. Si à présent  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow E$ , déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
- a.  $g \circ f = Id_E$   
 b.  $f \circ g = Id_F$

$$c. f \circ f = Id_E$$

**Exercice 30 :**

Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides et  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$ . Une application  $s$ , de  $Y$  dans  $X$ , telle que  $f \circ s = Id_Y$  s'appelle une section de  $f$ .

1. Montrer que si  $f$  admet au moins une section alors  $f$  est surjective.
2. Montrer que toute section de  $f$  est injective.

Une application  $r$ , de  $Y$  dans  $X$ , telle que  $r \circ f = Id_X$  s'appelle une rétraction de  $f$ .

3. Montrer que si  $f$  possède une rétraction alors  $f$  est injective.
4. Montrer que si  $f$  est injective alors  $f$  possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de  $f$  est surjective.
6. En déduire que si  $f$  possède à la fois une section  $s$  et une rétraction  $r$ , alors  $f$  est bijective et l'on a :  $r = s (= f^{-1}$  par conséquent).

**Exercice 31 :**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ , montrer que :

1.  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2.  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer alors que  $f$  est injective si et seulement si pour toute partie  $A$  de  $E$  et pour toute partie  $B$  de  $E$ , on a  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

**Exercice 32 :**

1. Soit  $f$  l'application de l'ensemble  $\{1,2,3,4\}$  dans lui-même définie par :

$$f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2.$$

Déterminer  $f^{-1}(A)$  lorsque  $A = \{2\}$ ,  $A = \{1,2\}$ ,  $A = \{3\}$ .

2. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . Déterminer  $f^{-1}(A)$  lorsque  $A = \{1\}$ ,  $A = [1,2]$ .

**Exercice 33 :**

1. Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x$ . Déterminer  $f([0,1] \times [0,1])$ ,  $f^{-1}([-1,1])$ .
2. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$  définie par  $f(x) = \cos(\pi x)$ , déterminer  $f(\mathbb{N})$ ,  $f(2\mathbb{N})$ ,  $f^{-1}(\{\pm 1\})$ .

**Exercice 34 :**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Soient  $A'$  et  $B'$  deux parties quelconques de  $F$ , non vides. Montrer que :

1.  $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
2.  $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

**Exercice 35 :**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

1. Montrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .

2. Montrer que pour toute partie  $B$  de  $F$ , on a  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .
3. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si pour toute partie  $A$  de  $E$  on a  $A = f^{-1}(f(A))$ .
4. Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si pour toute partie  $B$  de  $F$  on a  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

**Exercice 36 :**

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

1. Représenter  $D$  dans le plan.
2. a. Montrer que si deux couples de réels  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  vérifient

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

Alors  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  (autrement dit  $x_1 = x_2$  et  $y_1 = y_2$ ).

- b. Montrer que  $f$  est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..
3. Est-ce que  $f$  est surjective ?