

Exercice 1

Soient $ABCD$ un carré et G le barycentre des points $(A,1)$; $(B,2)$; $(C,3)$ et $(D,6)$

- 1) construire le point I barycentre des points $(A,1)$; $(C,3)$
 - 2) soit J tel que D barycentre des points $(B,-1)$; $(J,4)$
- Montrer que J est barycentre des points $(B,1)$; $(D,3)$
- 3) en déduire que les points I ; J et G sont alignés

Exercice 2

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère les points $A(2;\sqrt{3})$; $B(4;\sqrt{3})$ et $C(5;0)$ soit (C) l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que : $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

- 1) montrer que (C) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon
- 2) vérifier que $A \in (C)$ puis donner l'équation de la tangente au cercle (C) en A
- 3) a) calculer $\sin(\widehat{AB, AC})$ et déterminer l'aire du triangle ABC
- b) calculer le produit scalaire $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ puis déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{AB, AC})$

problème

Partie 1)

Soit g la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par : $g(x) = 4 - x\sqrt{x+2}$

- 1) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 2) calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau des variations de g
- 3) montrer que $(\forall x \in]2, +\infty[) g(x) < 0$ et $(\forall x \in]-2, 2[) g(x) > 0$
on remarquer que $g(2) = 0$

Partie (2)

On considère la fonction f définie sur $D = [-2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x+2}+1}$

1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ interpréter graphiquement les résultats

2) a) vérifier que $(\forall x \in D - \{-2\}) \quad f(x) - 2 = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+1} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x+2}}\right)$

b) étudier la dérivabilité de f à droite de -2

et donner une interprétation graphique du résultat

3) a) montrer que f est dérivable sur $D - \{-2\}$ et que :

$$(\forall x \in D - \{-2\}) \quad f'(x) = \frac{(\sqrt{x+2}+1)^2 - 3}{2\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+1)^2}$$

b) étudier les variations de f et vérifier que $f(2-2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 2$

puis dresser le tableau de variation de f

4) vérifier que $f(x) - x = \frac{g(x)}{\sqrt{x+2}+1}$

étudier la position de (C) par rapport à la droite $(\Delta) \quad y = x$

5) tracer la courbe (C) et la droite (Δ) (on donne $2\sqrt{3} - 2 \approx 1,46$)

Partie (3)

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n < 2$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$ (utiliser la question 4) partie (2))

3) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad |f(x) - 2| \leq \frac{1}{4}|x - 2|$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$