

Exercice 1

On considère les propositions :

$$P_1 \text{ " } (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x + 2y > 0 \text{ " } \quad P_2 \text{ " } (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x + 2y > 0 \text{ "}$$

- 1) Donner la négation des propositions P_1 ; P_2
- 2) Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions P_1 et P_2

2 pts

2 pts

Exercice 2

On considère la proposition $(F) (\forall \alpha \in \mathbb{R}^+) (\exists \beta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in \mathbb{R}) : (|x| \leq \beta \Rightarrow x^2 \leq \alpha)$

- 1) donner la négation de la proposition (F)
- 2) montrer que (F) est vraie

1.5 pt

1.5 pt

Exercice 3

$$1) \text{ montrer que } (\forall x \in \mathbb{R}^*) (\forall y \in \mathbb{R}^*) : (x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \neq y + \frac{1}{y} \right)$$

2 pts

- 2) en utilisant le raisonnement par disjonction de cas montrer que :

2 pts

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x - 2| \leq x^2 + x + 3$$

$$3) \text{ montrer par l'absurde que } \sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \quad (\text{on donne } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$$

2 pts

- 4) montrer par récurrence que :

2 pts

$$a) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 3 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

$$b) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=2n} (-1)^k k^2 = n(2n + 1)$$

2 pts

Exercice 4

Soient a et b deux réels . On considère la proposition :

$$Q \text{ " } [(\forall \alpha \in \mathbb{R}^+) a < b + \alpha] \Rightarrow (a \leq b)$$

- 1) donner la négation de Q
- 2) donner la contraposée de Q
- 3) montrer que Q est vraie

1 pt

1 pt

1 pt

BONUS : a et b deux réels strictement positifs montrer que $\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^4} \leq \frac{1}{ab}$