

## Problème d'analyse

**Partie (1)** On considère la fonction  $f$  définie sur par :  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(C) la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) montrer que  $f$  est impaire

b) étudier la branche infinie de (C) en  $+\infty$

2) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  et dresser le tableau de variations de  $f$

3) donner l'équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0 puis tracer (C)

**Partie (2)** Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$\text{On pose } v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k} \text{ et } u_n = \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

1) montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$

2) a) montrer que  $(\forall h \geq 0) 1-h \leq \frac{1}{1+h}$  et  $(\forall h \geq 0) \sqrt{1+h} \leq 1 + \frac{h}{2}$

b) en déduire que  $(\forall t \geq 0) 1 - \frac{t^2}{2} \leq f'(t) \leq 1$

3) a) montrer que  $(\forall x \geq 0) x - \frac{x^3}{6} \leq f(x) \leq x$

b) déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) v_n \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) \leq u_n \leq v_n$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Partie (3)**

1) on pose  $U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$

a) calculer  $U_0$  et montrer que  $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$

(utiliser une intégration par partie)

b) montrer que  $(U_n)_n$  est décroissante et convergente

c) montrer que (1)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

2) on suppose  $n \geq 3$  et on pose  $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$

a) prouver que  $(\forall n \geq 3) U_n + U_{n-2} = I_n$

## Problème d'analyse

- b) en utilisant une intégration par partie montrer que  $(\forall n \geq 3) \quad nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$
- c) prouver que (2)  $(\forall n \geq 3) \quad (2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$
- 3) des relations (1) et (2) déduire la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$

### Partie (4)

Soit  $F$  la fonction définie sur par :  $F(0) = \ln 2$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt$

$(\Gamma)$  la courbe de  $F$  dans un repère orthonormé  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) montrer que  $F$  est paire
- 2) a) prouver que  $(\forall x > 0) \quad -\frac{x^2}{4} + \ln 2 \leq F(x) \leq \ln 2$   
b) étudier la continuité et la dérivabilité de  $F$  à droite de 0
- 3) a) montrer que  $(\forall x > 0) \quad \frac{f(2x)}{2x} \leq F(x) \leq \frac{f(2x)}{2x}$   
b) étudier la branche infinie de  $(\Gamma)$  au voisinage de  $+\infty$
- 4) a) montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $(\forall x > 0) \quad F'(x) = \frac{f(2x) - 2f(x)}{2x^2}$   
b) montrer que  $f'$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$  puis déduire que  $(\forall x > 0) \quad f(2x) < 2f(x)$   
c) étudier les variations de  $F$  et donner le tableau de variations  $F$
- 5) tracer la courbe  $(\Gamma)$

## Exercice de complexe

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_\theta) \quad z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$  où  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

- 1) déterminer  $z_2 ; z_1$  les solutions de  $(E_\theta)$  (on prend  $z_1$  tel que  $\text{Im}(z_1) = \tan \theta$ )
- 2) écrire  $z_2 ; z_1$  sous forme trigonométrique
- 3) on considère dans le plan complexe  $(P)$  les deux points  $M_1(z_1) ; M_2(z_2)$ .

Quelle est la nature du triangle  $OM_1M_2$

- 4) soit  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  déterminer la forme trigonométrique des solutions de  $z^{2n} - 2z^n + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$