mathématique	موحد الدورة الأولى	2ème BAC SM
4 heures	مجموعة مدارس كوص مجموعة مدارس كوص	2015-2014

EXERCICE 1

Partie (1) Soit $(V_n)_{n>0}$ la suite telle que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$

1) montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)\ \ \frac{1}{k+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ — 0.5 ن

2) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ V_n \leq 1 + \ln(n)$ — 0.5 ن

Partie (2) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ U_n > 0$ en déduire la monotonie de $(U_n)_{n\geq 0}$ — 1 ن

2) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_{n+1}^2 - U_n^2 = 2 + \frac{1}{U_n^2}$ — 0.5 ن

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{U_k^2}$ — 0.5 ن

3) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n^2 \geq 2n+2$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$ — 0.5 ن

4) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n^2 \leq 2n + 1 + \frac{1}{2} V_n$ en déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{\sqrt{2n}}$ — 1 ن

EXERCICE 2

Soit m un complexe . on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E)\ \ Z^2 - (1 - im)Z + 2m^2 - 2im = 0$ on note Z_1 ; Z_2 les solutions de (E)

1) Déterminer m pour que $Z_1 \times Z_2 = 1$ — 1 ن

2) Déterminer m pour que $Z_1 = 1 + i$ soit solution de (E) puis déterminer la deuxième solution $\left(\text{on donne } 8 - 6i = (3-i)^2\right)$ — 1 ن

3) Vérifier que le discriminant de (E) s'écrit $\Delta = (1 + 3im)^2$ — 1 ن

Puis déterminer les solutions Z_1 et Z_2

EXERCICE 3

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application F qui à tout point $M(Z \neq i)$ fait associer le point $M'(Z')$ — 0.5 ن

tel que $Z' = \frac{i(Z - 2i)}{Z - i}$. $A(2i)$; $B(i)$ deux points de (P)

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z' = Z$ — 0.5 ن

2) a) sachant que $Z - i = e^{i\alpha}$; $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ déterminer $\|Z'\|$ et $\arg(Z')$

b) montrer que $(\forall Z \in \mathbb{C} - \{i, 2i\})$ $\arg(Z') \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\overline{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}\right)$ $[2\pi]$ — 0.5 ن

c) en déduire l'ensemble des points $M(Z)$ pour que Z' soit imaginaire — 0.5 ن

3) a) montrer que $(\forall Z \in \mathbb{C} - \{i\})$ $(Z' - i)(Z - i) = 1$ — 0.5 ن

b) déduire l'image du cercle U de centre B et de rayon $R = 1$ — 0.5 ن

4) on considère les points D , C d'affixes $d = -1 + i$; $c = 1 + i$ — 0.5 ن

(i) montrer que $(\forall Z \in \{i, c, d\})$ $\dfrac{Z' - c}{Z' - d} = -\dfrac{Z - c}{Z - d}$ — 0.5 ن

En déduire que $\left(\overline{\overrightarrow{M'D}, \overrightarrow{M'C}}\right) \equiv \pi + \left(\overline{\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC}}\right)$ $[2\pi]$ — 0.5 ن

(ii) on suppose que D , C , M non alignés

montrer que D , C , M , M' sont cocyclique

EXERCICE 4

(I) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2x + \ln x$ — 0.5 ن

1) a) calculer les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ — 0.5 ن — 0.5 ن

b) étudier les branche infinie de (C_f) en $+\infty$ — 1 ن

2) calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations — 0.5 ن

3) a) montrer que $f(x) = x$ admet une solution α et $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$

b) tracer la courbe (C_f) (on prend $\alpha \simeq 0,57$) — 0.5 ن

(II) Soient $(U_n)_n$; $(V_n)_n$ deux suites définies par : — 1 ن

$U_0 = e$; $U_{n+1} = f(U_n)$ et $V_0 = 1$; $V_{n+1} = 2V_n + 1$ — 0.5 ن

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n \geq e$ — 1 ن

b) vérifier que $V_{n+1} + 1 = 2(V_n + 1)$ puis déduire V_n en fonction de n

2) a) montrer que $(\forall x \geq e)$ $f(x) \geq 2x + 1$ — 0.5 ن

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n \geq V_n$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ — 0.5 ن

(III) On pose $h(x) = e^{-x}$. Soit $(W_n)_n$ la suite telle que : $W_0 \in \left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$ و $W_{n+1} = h(W_n)$ — 0.5 ن

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\dfrac{1}{e} < W_n < 1$ — 0.5 ن — 0.5 ن

b) vérifier que $h(\alpha)=\alpha$

2) montrer que $\left(\forall x\in \left]\frac{1}{e},1\right[\right)\quad |h'(x)|\leq \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

3) a) montrer que $(\forall n\in \mathbb{N})\quad |W_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{\sqrt[3]{e}}|W_n-\alpha|$

b) montrer que $(W_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite 0.5 ن

EXERCICE 5

Soit n un entier tel que $n\geq 3$. 0.5 ن

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=nxe^{-2x}-\frac{1}{2}$ 0.5 ن

1) a) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ 0.5 ن 0.5 ن

b) étudier la branche infinie de (C_n) en $-\infty$ 1 ن

2) a) étudier les variations de f_n et donner le tableau de variations 0.5 ن

b) montrer que $f_n(x)=0$ admet deux solutions u_n et v_n $\left(\text{on prend } u_n<v_n\right)$ 0.5 ن

2) a) étudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}) 1 ن

b) tracer (C_3) et (C_4) $\left(\text{on donne } u_3\simeq 0,3 \text{ ، } v_3\simeq 0,75 \text{ et } u_4\simeq 0,2 \text{ ، } v_4\simeq 1,1\right)$ 0.5 ن

3) a) montrer que $(\forall n\geq 3)\quad u_n>0$ 0.5 ن

b) étudier la monotonie de $(u_n)_n$ en déduire qu'elle est convergente 1 ن

c) montrer que $(\forall n\geq 3)\quad \frac{1}{2n}\leq u_n\leq \frac{e}{2n}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 1 ن

d) prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n=\frac{1}{2}$ 0.5 ن

5) a) montrer que $(\forall n\geq 4)\quad v_n>1$ $\left(\text{on donne } e^2<7,4\right)$

b) étudier la monotonie de $(v_n)_n$

c) montrer que $(\forall n\geq 4)\quad v_n\geq \frac{1}{2}\ln(2n)$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

d) montrer que $(\forall x>0)\quad 2\ln x\leq x$ en déduire que $(\forall n\geq 4)\quad v_n\leq \ln n$

e) déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n}$ et prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{\ln n}=\frac{1}{2}$

FIN du sujet