المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2023

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS | الموضوع | NS 24F

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

<u>CONSIGNES</u> :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ………..…………..…(7.75 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse ………..…………..…(2.25 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes........…(3.5 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique ………….......(3 pts)

- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 :(7.75 points)

Partie I

0.5 1- a) Montrer que : $\forall t \in [0,+\infty[$; $\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$

0.5 b) En déduire que : $\forall x \in [0,+\infty[$; $\frac{2x}{2+x} \leq ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

2- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{ln(1+x)}{x}$$

0.5 Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x)-1}{x} = \frac{-1}{2}$

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[\text{ ; } f(x)=g(x)e^{-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2- a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $\frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x)+\left(\frac{g(x)-1}{x}\right)$

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

0.75 3- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\text{ ; } f'(x)=\frac{x-(1+x)^2 ln(1+x)}{x^2(1+x)}e^{-x}$$

0.5 4- a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $-\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

0.25 b) En déduire que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $-\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

0.25 5- a) Dresser le tableau de variations de f

0.75 b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

Partie III

0.5 1- Montrer que l'équation d'inconnue x : $f(x)=3x$, admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

2- Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0=\beta \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}=\frac{1}{3}f\left(u_n\right)$$

0.5 a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n\geq 0$

0.5 b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \left|u_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \left|u_n-\alpha\right|\leq\frac{1}{2^n}\left|\beta-\alpha\right|$

0.25 d) En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

EXERCICE2 : (2.25 points)

On considère la fonction numérique : $x\mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\{0;1;...;n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n}\ ;\ e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 1- a) Montrer que : $\forall k\in\{0;1;...;(n-1)\}\ \exists c_k\in\left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}}-e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}e^{c_k}$

0.25 b) Montrer que : $\forall k\in\{0;1;...;(n-1)\}\ ;\quad M_kM_{k+1}=\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

(M_kM_{k+1} désigne la distance de M_k à M_{k+1})

0.5 c) En déduire que : $\forall k\in\{0;1;...;(n-1)\}\ ;\quad \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leq M_kM_{k+1}\leq\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ S_n=\sum_{k=0}^{n-1}M_kM_{k+1}$

0.5 a) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leq S_n\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

0.5 b) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

EXERCICE3 :(3.5 points)

On considère le nombre complexe : $u=1+\left(2-\sqrt{3}\right)i$

0.5 1- a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1-i$ et $1+\sqrt{3}i$

0.25 b) Montrer que : $\frac{(1-i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

0.25 c) En déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

0.5 d) Montrer que : $u=(\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

2- On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0=1 \ , \quad y_0=0 \quad \text{et} \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad ; \quad \begin{cases} x_{n+1}=x_n-\left(2-\sqrt{3}\right)y_n \\ y_{n+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)x_n+y_n \end{cases}$$

0.5 a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n+iy_n=u^n$

0.5 b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $x_n=\dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n=\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$

3- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe u^n

0.5 a) Déterminer les entiers n pour lesquels les points O, A_0 et A_n sont alignés.

0.5 b) Montrer que pour tout entier n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

<u>EXERCICE4</u> :(3 points)

Soit p **un nombre premier impair**. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2\equiv 2\ [p]$

0.25 1- a) Montrer que : $2^{p-1}\equiv 1\ [p]$

0.25 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\ [p]$

(On remarque que : $(2^{\frac{p-1}{2}}-1)(2^{\frac{p-1}{2}}+1)=2^{p-1}-1$)

2- Soit x une solution de l'équation (E)

0.5 a) Montrer que p et x sont premiers entre eux.

0.5 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$ (On pourra utiliser le théorème de Fermat)

0.25 3- Montrer que pour tout $k\in\{1,2,...,p-1\}$, p divise C_p^k

(On rappelle que : $(\forall k\in\{1,2,...,p-1\})$ $C_p^k=\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ et que : $kC_p^k=pC_{p-1}^{k-1}$)

0.25 4-a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p=2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)+i\,2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

(i étant le nombre complexe tel que : $i^2=-1$)

0.5 b) On admet que : $(1+i)^p=\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k}+i\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k+1}$

Montrer que : $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)\in\mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)\equiv 1\ [p]$ (on pourra utiliser la question3-)

0.5 5- En déduire que si $p\equiv 5\ [8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

EXERCICE5 : (3.5 points)

On rappelle que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, et que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,.\right)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\2y&x-y\end{pmatrix}/\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Partie I :

0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe de $\left(M_2(\mathbb{R}),+\right)$

0.25 2- Montrer que E est un sous- espace vectoriel de $\left(M_2(\mathbb{R}),+,.\right)$

0.25 3- a) Vérifier que : $\forall\left(x,y,x',y'\right)\in\mathbb{R}^4$; $M\left(x,y\right)\times M\left(x',y'\right)=M\left(xx'+3yy',xy'+yx'\right)$

0.5 b) En déduire que $\left(E,+,\times\right)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0.25 4- a) Vérifier que : $M\left(\sqrt{3},1\right)\times M\left(-\sqrt{3},1\right)=O$

0.25 b) En déduire que $\left(E,+,\times\right)$ n'est pas un corps.

Partie II :

Soient $F=\left\{x+y\sqrt{3}\ /\ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\right\}$ et $G=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\2y&x-y\end{pmatrix}/\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0.25 1- Montrer que : $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$; $x+y\sqrt{3}=0$ si et seulement si $(x=0$ et $y=0)$

0.25 2- Montrer que $F-\{0\}$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^*,\times\right)$

3- Soit φ l'application définie de $F-\{0\}$ vers E par :

$$\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\ ;\ \varphi\left(x+y\sqrt{3}\right)=M\left(x,y\right)$$

0.25 a) Vérifier que : $\varphi\left(F-\{0\}\right)=G-\{O\}$

0.25 b) Montrer que φ est un homomorphisme de $\left(F-\{0\},\times\right)$ vers $\left(E,\times\right)$

0.25 c) En déduire que $\left(G-\{O\},\times\right)$ est un groupe commutatif.

0.25 4- Montrer que $\left(G,+,\times\right)$ est un corps commutatif.

FIN