المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵖⴰ

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2022
– الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS | RS 24F

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	مسلك العلوم الرياضية – أ و ب - خيار فرنسية	المعامل	9

- La durée de l’épreuve est de 4 heures.
- L’épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l’ordre choisi par le candidat.

- L’exercice1 se rapporte à l’analyse ……….……….…(10 pts)
- L’exercice2 se rapporte aux nombres complexes....……(3.5 pts)
- L’exercice3 se rapporte aux structures algébriques…...(3.5 pts)
- L’exercice4 se rapporte à l’arithmétique ………..…....(3 pts)

L’usage de la calculatrice n’est pas autorisé
L’usage de la couleur rouge n’est pas autorisé

EXERCICE1 : (10 points)

0.25 **A**-1- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad ;\quad 1+x\leq e^{x}$

0.25 2-a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\quad ;\quad 0\leq 1-e^{-x}\leq x$

0.5 b) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\quad ;\quad 0\leq 1-x+\dfrac{x^{2}}{2}-e^{-x}\leq\dfrac{x^{3}}{6}$

0.5 c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{1-x-e^{-x}}{x^{2}}=-\dfrac{1}{2}$

B- On considère la fonction f définie sur $I=[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=1\quad\text{et}\quad(\forall x\in\,]0,+\infty[)\ ;\quad f(x)=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : $(\forall x>0)\quad ;\quad \dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1-2x-e^{-2x}}{x^{2}}-\dfrac{1-x-e^{-x}}{x^{2}}$

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que le nombre dérivé à droite en 0 est $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x>0)\quad ;\quad f'(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^{2}}\left(2x+1-e^{x}(1+x)\right)$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x>0)\quad ;\quad f'(x)\leq -e^{-2x}$

(On pourra utiliser : $1+x\leq e^{x}$)

0.25 c) En déduire le sens de variations de f sur I

3- **On admet que** : $(\forall x>0)\ ;\quad f''(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^{3}}\left(-4x^{2}-4x-2+e^{x}\left(2+2x+x^{2}\right)\right)$

0.25 a) Montrer que : $(\forall x\geq 0)\quad ;\quad 1+x+\dfrac{x^{2}}{2}\leq e^{x}$

0.5 b) En déduire que : $(\forall x>0)\quad ;\quad f''(x)>0$

4-**On admet que** : $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f'(x)=-\dfrac{3}{2}$

0.5 a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

0.5 b) En déduire que : $(\forall x\in I)\ ;\ |f'(x)|\leq\dfrac{3}{2}$

0.5 5-a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 b) Dresser le tableau de variations de f

0.25 c) Déterminer la position relative de la courbe (C) par rapport à sa demi-tangente au point $T(0;1)$

0.5 d) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

C-1- Pour tout x de $[0;1]$, on pose : $g(x) = f(x) - x$

0.5 a) Montrer que g est une bijection de $[0;1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

0.5 b) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0;1\right[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

2- Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k \in \{0;1........;n\}$, on considère les nombres réels $x_k = \dfrac{k\alpha}{n}$ et on pose :

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dt$$

0.5 a) Montrer que : $\forall k \in \{0;1........;n\}$; $|J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,dt$

0.5 b) En déduire que : $\forall k \in \{0;1........;n\}$; $|J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2$

3- On pose : $L = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,dt$

0.5 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) - L\right| \leq \dfrac{3}{4}\dfrac{\alpha^2}{n}$

0.25 b) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^{\alpha} f(t)\,dt$

EXERCICE2 :(3.5 points)

Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \{-1;0;1\}$

I- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m): \qquad mz^2 - (m-1)^2 z - (m-1)^2 = 0$$

0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = (m^2 - 1)^2$

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0.5 2) On prend uniquement dans cette question $m = e^{i\theta}$, avec $0 < \theta < \pi$

Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $m-1$ et $\frac{1}{m}-1$

0.5 1- Montrer que les points O , A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$

2- On suppose que m n'est pas un nombre réel.

Soient C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$

0.5 a) Montrer que l'affixe du point C est : $c = m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$

et que l'affixe du point D est : $d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.5 b) Montrer que : $2(p-r) = m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)$

et $2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m}-m\right)$

0.25 c) Montrer que : $q-r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$

0.5 d) Quelle est la nature du triangle PQR ? (justifier votre réponse)

EXERCICE3 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre

d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (La loi $\times$ étant la multiplication usuelle des matrices)

Pour tout réel a on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

et soit $G = \{M(a) / a \in \mathbb{R}\}$

1- Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall a \in \mathbb{R})\ ;\ \varphi(a) = M(a)$

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

0.5 b) Montrer que $\varphi(\mathbb{R}) = G$, en déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif.

0.5 c) Déterminer J l'élément neutre dans $(G,\times)$

0.5 d) Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G,\times)$

0.5 e) Résoudre dans $(G,\times)$ l'équation : $M(1) \times X = M(2)$

0.25 2-a) Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R})\ ;\ M(a) \times J = M(a) \times I$

0.5 b) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

0.25 c) Vérifier que les matrices de la forme $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, sont des solutions dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ de l'équation : $M(1) \times X = M(2)$

EXERCICE4 (3 points)

0.5 1- Montrer que 137 est un nombre premier.

0.5 2- Déterminer un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $38u + 136v = 2$

3- Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{38} \equiv 1\ [137]$

0.5 a) Montrer que x et 137 sont premiers entre eux.

0.5 b) Montrer que : $x^{136} \equiv 1\ [137]$

0.5 c) Montrer que : $x^2 \equiv 1\ [137]$

0.5 4- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E):\ x^{19} \equiv 1\ [137]$

FIN