

**TD : d'ARITHMETIQUE : Exercices de rappels avec corrections**

**Exercice1 :** 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12) Déterminer dans  $\mathbb{Z}$  tous les diviseurs de -8

**Solution :** 1) 156 a 12 diviseurs :

1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.

156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

2)  $D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

**Exercice2 :** 1)  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{Z}$  et  $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si  $\frac{a}{2b+c}$  et  $\frac{a}{b+c}$  alors  $\frac{a}{c}$

b) montrer que si  $\frac{a}{2b+3c}$  et  $\frac{a}{b+c}$  alors  $\frac{a}{c}$

c) montrer que si  $\frac{a}{x-y}$  et  $\frac{a}{b-c}$  alors  $\frac{a}{xb-cy}$

2)  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$  et  $\frac{a}{12n+1}$  et  $\frac{a}{-2n+3}$

Montrer que  $\frac{a}{19}$

3)  $d \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{Z}$  et  $\frac{d}{n^2+3}$  et  $\frac{d}{2n-1}$

Montrer que  $\frac{d}{13}$

**Solution :** 1) a)  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2b+c} \\ \frac{a}{b+c} \end{array} \Rightarrow \frac{a}{2(b+c)-(2b+c)} \Rightarrow \frac{a}{c}$

1) b)  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2b+3c} \\ \frac{a}{b+c} \end{array} \Rightarrow \frac{a}{2b+3c-2(b+c)} \Rightarrow \frac{a}{c}$

1) c)  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{x-y} \\ \frac{a}{b-c} \end{array} \Rightarrow \frac{a}{bx-by} \text{ et } \frac{a}{by-cy} \Rightarrow \frac{a}{bx-cy}$

2)  $\frac{a}{12n+1}$  et  $\frac{a}{-2n+3}$

$\Rightarrow \frac{a}{12n+1} \text{ et } \frac{a}{-12n+18} \Rightarrow \frac{a}{19}$

$\Rightarrow a \in \{\pm 1; \pm 19\}$

3)  $d \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{Z}$  et  $\frac{d}{n^2+3}$  et  $\frac{d}{2n-1}$

$\Rightarrow \frac{d}{n^2+3} \text{ et } \frac{d}{(2n-1)^2} \Rightarrow \frac{d}{4n^2+12} \text{ et } \frac{d}{4n^2-4n+1}$

$\Rightarrow \frac{d}{11+4n} \text{ et } \frac{d}{-2+4n} \Rightarrow \frac{d}{13}$

**Exercice3 :**  $a \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que :  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{5x-7} \\ \frac{a}{2x+3} \end{array} \Rightarrow \frac{a}{29}$

**Solution :**  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{5x-7} \\ \frac{a}{2x+3} \end{array} \Rightarrow \frac{a}{2(5x-7)-5(2x+3)}$

$\frac{a}{10x-14-10x-15} \Rightarrow \frac{a}{-29} \Rightarrow \frac{a}{29}$

**Exercice4 :** Soient  $a_n = 2n + 1$  et  $b_n = 5n + 4$

1- Montrer que tout diviseur commun de  $a_n$  et  $b_n$  divise 3.

2- Déterminer tous les diviseurs communs de  $a_n$  et  $b_n$

**Exercice5 :** Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

3 divise  $4^n - 1$  **Solution :**

Montrons que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$

1étapes : l'initialisation : Pour  $n=0$  nous avons

$4^0 - 1 = 0$  est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit

vraie c'est-à-dire :  $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$  donc

$4^n = 3k + 1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est

vraie. Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' \quad ??$

$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$

$= 4 \times (3k + 1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$

avec  $k' = 4k + 1$  Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; 4^n - 1$  est divisible par 9

**Exercice6 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles :  $n + 2/3n + 1$

**Solution :**  $n + 2/3n + 1$  et  $n + 2/3n + 2$

$n + 2/3n + 1$  et  $n + 2/3n + 6$  donc

$n + 2/(3n + 6) - (3n + 1)$  donc  $n + 2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5 donc Il faut que  $n + 2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$  ce qui entraîne que

$n \in \{-3; -7; -1; 3\}$

On vérifie que que que si  $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$  alors  $n+2/3n+1$  avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles :  $n+2/3n+1$  sont :  $-7 ; -3 ; -1 ; 3$

**Exercice7 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles la fraction  $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

**Solution :** Cette fraction a un sens si :  $n+4 \neq 0$  soit  $n \neq -4$  On constate que  $3n+8 = 3(n+4) - 4$   
 $n+4$  divise  $3(n+4)$ , donc  $n+4$  divise  $3n+8$  si  $n+4$  divise  $-4$ .

Les diviseurs de  $-4$  sont  $1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4$ .

Il faut que  $n+4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$  ce qui

entraîne que  $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que  $-4$  n'appartient pas à  $-8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0$  avant de conclure.

Conclusion : la fraction  $\frac{3n+8}{n+4}$  représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif  $n$  :  $-8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0$ .

**Exercice8 :** Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  les équations suivantes : a)  $x^2 - y^2 = 32$  avec  $x > y$

b)  $2xy + 2x + y = 99$

**Solution :** a)  $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 32$   
 $x-y$  et  $x+y$  sont des diviseurs positif de 32  
 Et  $(x-y) + (x+y) = 2x$  est un nombre pair

Donc  $x-y$  et  $x+y$  ont la même parité  $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
$x$	9	6
$y$	7	2

$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$

b)  $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$\Leftrightarrow y(2x+1) + 2x+1 = 99+1 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1) = 100$

Donc :  $2x+1$  et  $y+1$  sont des diviseurs positif de 100 :  $D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
$x$	0			2		12		
$y$	99			10		3		

$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$

**Exercice9 :** déterminer le nombre entier naturel  $n$  Tel que le quotient de la division euclidienne de  $n$  par 25 est  $p$  et le reste est  $p^2$  ( $p \in \mathbb{N}$ )

**Solution:**  $n \in \mathbb{N} : n = 25p + p^2$  et  $0 \leq p^2 < 25$   
 donc  $0 \leq p < 5$

Donc :  $\begin{cases} p=0 \\ n=0 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} p=1 \\ n=26 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} p=2 \\ n=54 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} p=3 \\ n=84 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} p=4 \\ n=116 \end{cases}$

Donc :  $n \in \{0; 26; 54; 84; 116\}$

**Exercice 10:**  $n$  et  $a$  et  $b$  des entiers naturels  
 Démontrer que si  $q$  est le quotient de la division euclidienne de  $n$  par  $a$  et  $q'$  est le quotient de  $q$  par  $b$  Alors  $q'$  est aussi le quotient de  $n$  par  $ab$

**Solution:** soit  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $a$  et  $r'$  le reste de la division euclidienne de  $q$  par  $b$  on a donc :

$n = aq + r$  et  $0 \leq r < a-1$  et on a :  $q = bq' + r'$

et  $0 \leq r' < b-1$  donc on déduit que :

$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$

Et puisque :  $0 \leq r' < b-1$  et  $0 \leq r < a-1$  alors :  $ar' + r < ab-1$  donc  $n = abq' + ar' + r$

$0 \leq ar' + r < ab-1$  conclusion :  $q'$  est aussi le quotient de  $n$  par  $ab$

**Exercice11:**  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{Z}$

si  $q$  est le quotient de la division euclidienne de  $a-1$  par  $b$  déterminer le quotient de la division euclidienne de  $ab^9 - 1$  par  $b^{10}$

**Solution :** soit  $r$  le reste de la division euclidienne de  $a-1$  par  $b$  donc :

$a-1 = bq + r$  et  $0 \leq r < b$

Donc :  $ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$

Donc :  $ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$

Donc :  $ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$

On montre que :  $0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$  ???

On a :  $0 \leq r < b$  donc  $0 \leq r+1 \leq b$

donc  $0 \leq (r+1)b^9 \leq b^{10}$  donc  $0 \leq (r+1)b^9 - 1 \leq b^{10} - 1$

donc  $0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$

conclusion :  $q$  est aussi le quotient de la

division euclidienne de  $ab^9 - 1$  par  $b^{10}$

b) L'inverse est-il vrai ?

**Exercice12:** 1) Les nombres suivants sont-ils premiers : 499 ; 601 ; 703 ; 2003 ;  $2n^2 + 3n$   $n \in \mathbb{N}$

**Exercice 13 :**

Montrer que le reste de la division euclidienne de  $n^2$  par 3 ne peut pas être égale à 2.

**Exercice 14 :**

a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme  $p = 6n + 1$  ou  $p = 6n + 5$

**Exercice 15 :** montrer que  $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

**Solution :** on pose  $d = a \wedge (a+1)$

$$\Rightarrow d/a \text{ et } d/a+1 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

**Exercice 16 :**  $n \in \mathbb{N}$  On considère les deux

nombre :  $A = n^2 + 3$  et  $B = n + 2$

1) montrer que  $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel  $n$  tel que :  $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

**Solution :** 1) on pose  $d = A \wedge B$  et  $d' = (n+2) \wedge 7$

On a :  $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d/A \text{ et } d/B \Rightarrow d/n^2+3 \text{ et } d/n+2$$

$$\Rightarrow d/n^2+3 \text{ et } d/n+2 \text{ on utilisant la division}$$

euclidienne : on trouve :  $n^2 + 3 = (n+2)(n-2) + 7$

$$n^2 + 3 - (n+2)(n-2) = 7$$

$$\Rightarrow d/n^2+3 - (n+2)(n-2)$$

$$\Rightarrow d/7 \text{ et } d/n+2 \Rightarrow d/(n+2) \wedge 7 \Rightarrow d/d'$$

Inversement : On a :  $d' = (n+2) \wedge 7$

$$\Rightarrow d'/n+2 \text{ et } d'/7 \Rightarrow d'/(n+2)(n-2) \text{ et } d'/7$$

$$\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)+7 \text{ et } d'/7 \Rightarrow d'/n^2+3 \text{ et } d'/7$$

$$\text{donc : } d'/A \wedge B \text{ donc } d'/d$$

$$\text{donc } d'/d' \text{ et } d'/d \text{ et } d \in \mathbb{N} \text{ et } d' \in \mathbb{N} \text{ donc}$$

$$\text{donc } d = d' \text{ donc : } A \wedge B = (n+2) \wedge 7$$

$$2) \frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n+2/n^2+3 \text{ et on a : } n+2/n+2$$

$$\text{Donc : } n+2/A \wedge B \text{ Donc : } n+2/(n+2) \wedge 7$$

$$\text{Donc : } n+2/7 \text{ or } 7 \text{ est premier donc :}$$

Il faut que  $n+2 \in \{1;7\}$  ce qui entraîne que  $n=5$

**Exercice 17:**

1- Montrer que tout diviseur commun de :

$a = 2n + 3$  et  $b = 5n + 1$  est un diviseur de 13

2- Déterminer tous les diviseurs communs

de  $a$  et  $b$ .

3- Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquels :

$$a \wedge b = 13$$

**Exercice 18:**  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$  et  $d \in \mathbb{Z}$  tels que :  $a = bc + d$

1) montrer que  $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que :  $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

**Solution :** 1) on pose  $\Delta_1 = a \wedge b$  et  $\Delta_2 = b \wedge d$

$$\text{On a : } \Delta_1/a \text{ et } \Delta_1/b \text{ donc } \Delta_1/a \text{ et } \Delta_1/bc \text{ donc}$$

$$\Delta_1/a-bc \text{ donc } \Delta_1/d$$

$$\text{donc } \Delta_1/d \text{ et } \Delta_1/b \text{ donc } \Delta_1/b \wedge d \text{ donc } \Delta_1/\Delta_2$$

$$\text{inversement On a : } \Delta_2/b \text{ et } \Delta_2/d \text{ donc } \Delta_2/d \text{ et}$$

$$\Delta_2/bc \text{ donc } \Delta_2/bc+d \text{ donc } \Delta_2/a$$

$$\text{donc } \Delta_2/a \text{ et } \Delta_2/b \text{ donc } \Delta_2/a \wedge b \text{ donc } \Delta_2/\Delta_1$$

$$\text{On a donc : } \Delta_1/\Delta_2 \text{ et } \Delta_2/\Delta_1 \text{ et } \Delta_1 \in \mathbb{N} \text{ et } \Delta_2 \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } \Delta_1 = \Delta_2$$

$$\text{donc : } a \wedge b = b \wedge d$$

2) on a :  $a = bc + (a - bc)$  si on prend :  $d = a - bc$  et

d'après 1) on aura :  $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

**Exercice 19 :**  $a \in \mathbb{N}$  On considère les deux

nombre :  $A = 35a + 57$  et  $B = 45a + 76$

montrer que  $A \wedge B = 1$  ou  $A \wedge B = 19$

**Solution :** 1) on pose  $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d/A \text{ et } d/B \Rightarrow d/35a+57 \text{ et } d/45a+76$$

$$\Rightarrow d/9(35a+57) \text{ et } d/7(45a+76)$$

$$\Rightarrow d/315a+513 \text{ et } d/315a+532$$

$$\Rightarrow d/19 \text{ or } 19 \text{ est premier donc :}$$

Il faut que  $d \in \{1;19\}$  ce qui entraîne que :

$$A \wedge B = 1 \text{ ou } A \wedge B = 19$$

**Exercice 20:**

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer :

$$67 \wedge 39$$

2) en déduire deux nombres relatifs  $u$  et  $v$  tel

$$\text{que : } 39u + 67v = 1$$

$$\text{Solution: 1) (1) } 67 = 1 \times 39 + \boxed{28} \quad \text{(2) } 39 = 1 \times 28 + \boxed{11}$$

$$\text{(3) } 28 = 2 \times 11 + \boxed{6} \quad \text{(4) } 11 = 1 \times 6 + \boxed{5}$$

$$\text{(5) } 6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \quad \text{(6) } 5 = 1 \times 5 + \boxed{0}$$

Donc :  $67 \wedge 39 = 1$  c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

$$\begin{aligned}
2) \quad (5) \quad 6 &= 1 \times 5 + \boxed{1} \Rightarrow 6 - 1 \times 5 = \boxed{1} \\
\Rightarrow 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6) &= \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 6 - 1 \times 11 = \boxed{1} \\
\Rightarrow 2 \times (28 - 2 \times 11) - 1 \times 11 &= \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times 11 = \boxed{1} \\
\Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times (39 - 1 \times 28) &= \boxed{1} \Rightarrow 7 \times 28 - 5 \times 39 = \boxed{1} \\
\Rightarrow 7 \times (67 - 1 \times 39) - 5 \times 39 &= \boxed{1} \Rightarrow \boxed{7 \times 67 - 12 \times 39 = \boxed{1}}
\end{aligned}$$

**Exercice21 :** Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :

1)  $n \wedge (n+1) = 1$     2)  $n \wedge (2n+1) = 1$

3)  $(2n+1) \wedge (3n+1) = 1$

**Exercice22:**  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}$  Si 17 est le reste de la division euclidienne de  $a$  par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de  $b$  par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1)  $a+b$     2)  $a^2+b^2$     3)  $2a-5b$

**Solution :** 1) On a :  $a \equiv 17[19]$  et  $b \equiv 15[19]$

donc :  $a+b \equiv 17+15[19] \Leftrightarrow a+b \equiv 13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $a+b$  Par 19 est : 13

2)  $a \equiv 17[19] \Rightarrow a^2 \equiv 17^2[19] \Rightarrow a^2 \equiv 4[19]$

$b \equiv 15[19] \Rightarrow b^2 \equiv 15^2[19] \Rightarrow b^2 \equiv 16[19]$

Donc :  $a^2+b^2 \equiv 4+16[19] \Leftrightarrow a^2+b^2 \equiv 1[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $a^2+b^2$  Par 19 est : 1

3)  $a \equiv 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 2 \times 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 15[19]$  (1)

$b \equiv 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 5 \times 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 18[19]$

Donc :  $5b \equiv -1[19] \Rightarrow -5b \equiv 1[19]$  (2)

De (1) et (2) on déduit que :

$2a-5b \equiv 15+1[19] \Rightarrow 2a-5b \equiv 16[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $2a-5b$  Par 19 est : 16

**Exercice23 :** 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division par 10 du nombres  $3^n$

2) en déduire le chiffre des unités du nombres  $2019^{2020}$

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel  $n$  tel que :  $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10]$

**Solution :** 1)  $3^n \equiv r[10]$  et  $r \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

On a :  $3^0 \equiv 1[10]$  et  $3^1 \equiv 3[10]$  et  $3^2 \equiv 9[10]$

et  $3^3 \equiv 7[10]$  et  $3^4 \equiv 1[10]$

Si  $n \in \mathbb{N}$  alors :  $n = 4k+r$  avec  $r \in \{0;1;2;3\}$

On a :  $3^4 \equiv 1[10]$  donc :  $(3^4)^k \equiv 1^k[10]$

donc :  $3^{4k} \equiv 1[10]$  et  $3^{4k+1} \equiv 3[10]$  et  $3^{4k+2} \equiv 9[7]$

et  $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres  $2019^{2020}$  est le reste dans la division du nombre  $2019^{2020}$  Par 10

cad : on cherche  $r$  tel que :  $2019^{2020} \equiv r[10]$  ??

On a :  $2019 = 2010 + 9$  donc :  $2019 \equiv 9[10]$

donc :  $2019^{2020} \equiv 9^{2020}[10]$  donc :  $2019^{2020} \equiv 3^{4040}[10]$

or :  $4040 = 4 \times 1010 = 4 \times k$

donc :  $2019^{2020} \equiv 3^{4k}[10]$  donc :  $2019^{2020} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités du nombres  $2019^{2020}$  est 1

Autre méthode :  $2019 \equiv 9[10]$

donc :  $2019 \equiv -1[10]$  donc :  $2019^{2020} \equiv 1[10]$

3) On Dresse une table comme suite :

$n$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 9[10]$	$\equiv 7[10]$
$5n$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$
$3^n + 5n + 2$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 4[10]$

donc :  $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow n = 3k + 1$  avec  $k \in \mathbb{N}$

**Exercice24 :** 1) montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$

2) montrer que:  $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3[10]$

**Solution :** 1) on a :  $(n+2)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$  Donc :

$(n+2)^{n+2} = C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2} + C_{n+2}^1 n^1 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$

$(n+2)^{n+2} = 2^{n+2} + (n+2)n2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$

Donc :  $(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2+n^2+2n) + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2+2n) + 2^{n+1}n^2 + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(1+n) = n^2 \left( 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k} \right)$

on a :  $n^2 \left( 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k} \right) \equiv 0[n^2]$

donc :  $(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$

2) on a :  $7 \equiv 7[10]$  et  $7^2 \equiv -1[10]$  donc  $7^4 \equiv 1[10]$

Donc :  $7^{4k} \equiv 1[10]$  et  $7^{4k+1} \equiv 7[10]$  et  $7^{4k+2} \equiv 9[10]$

$7^{4k+3} \equiv 3[10]$

On aussi :  $7 \equiv 3[4]$  et  $7^2 \equiv 1[4]$

Donc  $7^{2k} \equiv 1[4]$  et  $7^{2k+1} \equiv 3[4]$

Or :  $7^{7^{7^7}} \equiv 1[2]$  (car impair)

Donc :  $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3[10]$

**Exercice 25 :** 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $45872^{2018}$  par 9

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $25614^{6512}$  par 13

3) Montrer que pour tout  $n$  entier naturel :  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est divisible par 7

4) Montrer que pour tout  $n$  entier naturel,  $5n^3 + n$  est divisible par 6

5) Montrer que si  $n$  n'est pas un multiple de 7, alors :  $n^6 - 1$  est un multiple de 7

6) Montrer que pour tout entier naturel, le nombre  $n(n^2 + 5)$  est divisible par 6

**Exercice 26 :**  $x \in \mathbb{N}^*$  et  $y \in \mathbb{N}^*$  On considère les deux nombres :  $a = 9x + 4y$  et  $b = 2x + y$

1) montrer que  $x \wedge y = a \wedge b$

2)  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $a = n^2 + 5n + 13$  et  $b = n + 3$

a) montrer que  $a \wedge b = b \wedge 7$

b) en déduire les valeurs possibles  $a \wedge b = d$

c) montrer que :  $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

d) en déduire les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  tel que :  $a \wedge b = 1$

**Solution :** 1) on pose  $d = x \wedge y$  et  $d' = a \wedge b$  montrons que :  $d = d'$

$$d = x \wedge y \text{ donc : } \Rightarrow d/x \text{ et } d/y \Rightarrow d/a \text{ et } d/b$$

Car il divise toute combinaison de  $x$  et  $y$

$$\Rightarrow d/a \wedge b \Rightarrow d/d'$$

Inversement :

$$d' = a \wedge b \Rightarrow d'/a \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/9x+4y \text{ et } d'/2x+y$$

$$\Rightarrow d'/(9x+4y) - 4(2x+y) \text{ et } d'/9(2x+y) - 2(9x+4y)$$

$$\Rightarrow d'/x \text{ et } d'/y \Rightarrow d'/x \wedge y \Rightarrow d'/d$$

ce qui entraîne:  $d = d'$

2)  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $a = n^2 + 5n + 13$  et  $b = n + 3$

a) montrons que  $a \wedge b = b \wedge 7$  ?

la division euclidienne de  $n^2 + 5n + 13$  par  $n + 3$

$$\text{donne : } n^2 + 5n + 13 = (n + 3)(n + 2) + 7$$

$$\text{Donc : } a = b(n + 2) + 7 \Leftrightarrow a - b(n + 2) = 7$$

on pose  $d' = b \wedge 7$  et  $d = a \wedge b$

montrons que :  $d = d'$

$$d = a \wedge b \Rightarrow d/a \text{ et } d/b \Rightarrow d/a - b(n + 2) \text{ et } d/b$$

$$\Rightarrow d/7 \text{ et } d/b \Rightarrow d/b \wedge 7 \Rightarrow d/d'$$

$$d' = b \wedge 7 \Rightarrow d'/7 \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/b(n + 2) + 7 \text{ et } d'/b$$

$$\Rightarrow d'/a \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/a \wedge b \Rightarrow d'/d$$

ce qui entraîne:  $d = d'$

b) les valeurs possibles  $a \wedge b = d$  ??

on a :  $a \wedge b = b \wedge 7 = d$

donc :  $d/7$  donc :  $d = 1$  ou  $d = 7$

c) montrons que :  $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

$$n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n + 3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7/n + 3 \Leftrightarrow 7/b \Leftrightarrow b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$$

d) les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  tel que :  $a \wedge b = 1$  ??

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n$  n'est pas congrue à 0 modulo 4

$n \equiv 0[7]$  ou  $n \equiv 1[7]$  ou  $n \equiv 2[7]$  ou  $n \equiv 3[7]$  ou  $n \equiv 5[7]$

ou  $n \equiv 6[7]$

**Exercice 27 :** Résoudre les équations

suyvantes dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  : 1)  $\bar{2}x = \bar{3}$  2)  $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$

3)  $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

**Solution :** On a :  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}\}$

1) On Dresse une table comme suite :

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que

Cette équation n'admet pas de solutions

Donc :  $S = \emptyset$

1) On Dresse une table comme suite :

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$x^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 + \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\bar{0}$  et  $\bar{1}$  sont solutions de l'équation

Donc :  $S = \{\bar{0}; \bar{1}\}$

2)  $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow \bar{1}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Car :  $2013 = 503 \times 4 + 1$

On Dresse une table comme suite :

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$x^3$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$x^3 + \bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Si  $\bar{k} = \bar{0}$  :  $S = \{\bar{0}; \bar{2}\}$

Si  $\bar{k} = \bar{1}$  :  $S = \{\bar{3}\}$

$$\text{Si } \bar{k} = \bar{2} : S = \emptyset$$

$$\text{Si } \bar{k} = \bar{3} : S = \{\bar{1}\}$$

**Exercice28** : Résoudre dans  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$  l'équations

$$\text{sujets : } x + \bar{3}y = \bar{1}$$

**Solution** : on Dresse une table des opérations de

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\} \text{ Comme suite}$$

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

$$S = \{(\bar{0}; \bar{2}); (\bar{1}; \bar{0}); (\bar{2}; \bar{3}); (\bar{3}; \bar{1}); (\bar{4}; \bar{3}); (\bar{4}; \bar{4})\}$$

**Exercice29** : Résoudre dans  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$  les

$$\text{système suivants : } \begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

**Solution** :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{2} + \bar{4})y = \bar{3} + \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \bar{4} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{1} \\ y = \bar{4} \end{cases} \text{ donc } S = \{(\bar{1}; \bar{4})\}$$

**Exercice30** : déterminer :  $d = (-8316) \wedge 1080$

$$\text{et } m = 8316 \vee 1080$$

**Solution** : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

$$\text{Donnent : } 8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11 \text{ et}$$

$$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108 \text{ et}$$

$$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$$

**Exercice31**: si  $2 = a \wedge b$  et  $-12 = a \times b$

déterminer :  $a \vee b$

**Solution** : on a  $a \wedge b \times (a \vee b) = |ab|$

$$\text{donc : } a \vee b = |a \times b| / a \wedge b = |-12| / 2 = 6$$

**Exercice32**:  $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$  et  $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les  $a \vee b$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

**Solution** :

$$a = ((5^n)^2 - 1)((6^n)^2 - 1) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$$

$$a = b(5^n + 1)(6^n + 1) \text{ donc : } \frac{b}{a} \text{ donc : } a \vee b = a$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien