

TD : Exercices d'applications et de réflexion

THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)

PROF: ATMANI NAJIB

2BAC SM BIOF

TD : THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)

Exercice 1 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2 \quad \text{Montrer que } f'$$

s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x},$$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

Exercice 3 : Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } f(0) = 0$$

Montrer : $(\exists c \in]-1, 1[) (f'(c) = 0)$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) \quad \text{Montrer que}$$

l'équation $f'(x) = 0$ admet trois solutions sur \mathbb{R}

Exercice 5 : Considérons une fonction f continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ telle que : $f(0) - f(1) = -1$.

Montrer en utilisant le théorème de Rolle

$$(\exists c \in]0, 1[) \left(\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2 + 1)^2} \right)$$

Exercice 6 : Détermination d'une limite.

Considérons les deux fonctions :

$$u(t) = \text{Arctan}(t) - t \quad \text{et } v(t) = t^2 \quad \text{et soit } x \in \mathbb{R}^*$$

1) Montrer qu'il existe c compris entre 0 et x tel

$$\text{que : } \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$$

2) En déduire la limite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2}$

Exercice 7 : En utilisant le I.A.F

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|)$

Exercice 8 : En utilisant le I.A.F

Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ et $0 \leq a \leq b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$$

Exercice 9 : En utilisant le Théorème des accroissements finis (T.A.F) donner un

encadrement du nombre $\sqrt{10001}$ et en déduire

une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ avec la

précision 5×10^{-5} .

Exercice 10 : soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Calculer u_1 ; u_2 et u_3

2) a) montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ : \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

b) en déduire que : $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 11 : Soit f une fonction définie sur

l'intervalle $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$ par :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sin x \quad \text{et la suite } (u_n) \text{ définie par :}$$

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et } u_0 \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$$

1) montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une

solution unique $\alpha \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$

2) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$

3)a) montrer que : $\forall x \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) en déduire que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \forall n \in \mathbb{N}$

4) calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 12 : Soit f une fonction dérivable trois fois sur $[0;1]$ tel que : $f(1) = 1$ et

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$$

Et soit le polynôme : $P(x) = x^2(-2x+3)$

1) calculer : $P(0)$; $P'(0)$; $P(1)$; $P'(1)$

2) on pose : $g(x) = f(x) - P(x)$

a) montrer qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que : $g^{(3)}(\alpha) = 0$

b) en déduire qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que :

$$f^{(3)}(\alpha) = -12$$

Exercice 13 : Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^*

$$\text{par : } f(x) = x \arctan \left(\sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}^* \text{ on pose : } F(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1) vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^* F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$

2) montrer que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^* \right) \left(\exists y \in \mathbb{R}^* \right) / (y-x) \left(y - \frac{1}{x} \right) \leq 0 \text{ et } F'(y) = 0$$

3) en application le théorème de Rolle a F sur un intervalle montrer qu'il existe un réel c non nul tel que la tangente a la courbe de f au point d'abscisse c passe par l'origine du repère

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

