	موضوع تجريبي	2013-2014

Exercice (1) 3 points

(I) Soit m un nombre complexe non nul .

on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (I) $(Z+1)^2+m^2=0$

1) résoudre l'équation (I)

2) déterminer m pour que $e^{i\frac{\pi}{3}}$ soit solution de (I)

3) déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que les solutions de (I) aient même module

(II) Le plan complexe est munie d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points $M(m)$; $B(b=-1+im)$ et $C(c=-1-im)$

1) déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que M ; B ; C soient alignés

2) on suppose $|m|^2+\mathrm{Re}(m)\neq 0$

Soit R la transformation du plan qui associer $M_1(Z_1)$ au point $M'(Z')$ tel que $Z'=iZ_1-1$

a) Montrer que R est une rotation et déterminer le centre Ω et un argument de son angle

b) Montrer que $\left(\dfrac{c-m}{c-b}\in i\mathbb{R}\right)\Leftrightarrow\left(|m|^2=\mathrm{Im}(m)\right)$

c) Déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour que M , B , C et Ω soient cocycliques

Exercice (2) 3.5 points

On considère dans l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ l'ensemble des matrices :

$M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -4b & a+2b \end{pmatrix}$; $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et on pose $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

1) a) montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif

b) montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension

2) a) vérifier que $J^2=2J-4I$ et déduire que J admet un inverse que l'on déterminera

b) montrer que E est une partie stable pour la $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$

3) on considère l'application $\begin{array}{llll} f: & E & \to & \mathbb{C} \\ & M(a,b) & \to & z=(a+b)+ib\sqrt{3} \end{array}$

a) montrer que f est un isomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{C},\times)$

b) déduire la structure de $(E,+,\times)$

Exercice (3) 4 points

Partie (1)

Soient α et β deux entiers naturels tels que $\alpha \wedge \beta = 1$

1) montrer que $\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \wedge \left(\alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2\right) = 1$

2) soit p un nombre premier tel que $p > 3$ et $p \mid \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2$

a) montrer que $p \wedge \alpha = 1$ et déduire que $\alpha^3 \equiv \beta^3 \ [p]$

b) Montrer que $p \equiv 1 \ [6]$

Partie(2)

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) $x^3 - y^3 = 2014\left(x^2 + y^2\right)$ et on pose $d = x \wedge y$

1) montrer qu'il existe un couple (a,b) de $\mathbb{N}^{*2}$ tel que et $d\left(a^3 - b^3\right) = 2014\left(a^2 + b^2\right)$ et $a \wedge b = 1$

2) a) montrer que $a > b$ et $a^2 + ab + b^2 \mid 2014$

b) vérifier que $a^2 + ab + b^2 \geq 7$ puis déduire que $a^2 + ab + b^2 = 19$

3) montrer que $b^2 < 7$ et résoudre l'équation (E)

Exercice (4) 5 points

Partie(1)

Soit f la fonction définie sur $\left[0, +\infty\right[$ par : $f(x) = x + e^{-x}$

1) étudier la branche infinie de la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$

2) étudier le sens de variation de f

3) tracer la courbe $\left(C_f\right)$

Partie(2)

On considère la suite $\left(U_n\right)_n$ définie par : $U_1 = 0$ et $U_{n+1} = f\left(U_n\right)$

1) a) montrer que $(\forall x > 0)$ $\ln(1+x) \leq x$

b) déduire $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $\ln(1+n) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$

2) vérifier que $(\forall n \geq 1)$ $f(\ln n) = \dfrac{1}{n} + \ln n$ et montrer par récurrence que $(\forall n \geq 1)$ $U_n \geq \ln n$

puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3) montrer que $(\forall n \geq 2)$ $U_n \leq 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n-1}$

4) a) montrer que $(\forall k > 1)$ $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$

b) déduire que $(\forall n \geq 2)$ $U_n \leq 1+\ln(n-1)$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{\ln n}$

Exercice(5) 5points

(I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(t)=e^{-\frac{1}{t^2}} & ; \quad t\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

1) étudier la dérivabilité de g au point $a=0$
2) montrer que $(\forall t\in\mathbb{R})$ $2g(t)=t^3g'(t)$
3) étudier le sens de variation de g et donner son tableau de variation puis tracer (C_g)

(II) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(t)=e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x g(t)\,dt & ; \quad t\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) a) montrer que f est impaire

b) montrer que $(\forall x>0)$ $0\leq \int_0^x g(t)\,dt \leq xe^{-\frac{1}{x^2}}$ et déduire que f est continue en 0

2) montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculer $f'(x)$

3) a) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$ $\int_0^x g(t)\,dt=\frac{1}{3}x^3g(x)-\frac{3}{2}\int_0^x t^2g(t)\,dt$

b) déduire que est croissante sur $]0,+\infty[$

4) a) montrer que $(\forall x>1)$ $f(x)\geq x+\frac{1}{x}-2$ (on donne $(\forall u\in\mathbb{R})$ $e^u\geq u+1$)

b) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f