Exercice de « Ln »

Soit n un entier naturel non nul .

On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$

Partie (1) 1) a) calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$

b) étudier la branche infinie de (C_1) au voisinage de $+\infty$

2) calculer la fonction dérivée $f_1'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f_1

3) montrer que (C_1) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α_1 appartient à $]0,1[$

4) tracer la courbe (C_1) (on donne $\alpha_1 \simeq 0,77$)

Partie (2) 1) a) calculer $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

b) étudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $+\infty$

2) calculer la fonction dérivée $f_n'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f_n

Partie (3) 1) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n et $0 < \alpha_n < 1$

2) prouver que $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ en déduire que $(\alpha_n)_{n\geq1}$ est croissante et convergente

3) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $1 - \alpha_n \leq \frac{\ln(2)}{2n}$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

Soit n un entier tel que $n \geq 3$.

On considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{x} + n\ln x$

1) calculer les limites $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f_n(x)$

2) calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de f_n

3) a) étudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1})

b) tracer dans un même repère les deux courbes (C_3) و (C_4)

4) a) montrer que $f_n(x) = 0$ admet deux solutions V_n ; U_n telles que $0 < U_n < \frac{1}{n} < V_n \leq 1$

et déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

b) étudier la monotonie de $(V_n)_n$ et déduire qu'elle est convergente

5) exprimer $\ln V_n$ en fonction de V_n et n puis déduire la limite de la suite $(V_n)_n$