

# Lois de probabilité discrètes

## I. Loi de probabilité associée à une variable aléatoire discrète

On suppose que  $\Omega$  est un univers fini constitué de  $n$  résultats possibles. On suppose de plus qu'à chaque résultat possible  $\omega_1, \dots, \omega_n$  est associé un nombre réel  $x_1, \dots, x_n$ . On définit ainsi une variable aléatoire  $X$  (une variable aléatoire est donc une fonction qui à un résultat  $\omega_i$  associe un nombre  $x_i$  ou encore une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ ). La loi de probabilité de la variable  $X$  est la liste des probabilités  $p(X = x_1), \dots, p(X = x_n)$ . Elle peut être représentée dans un tableau.

$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	...	$p(X = x_n)$

**Propriétés.** Pour chaque  $i$ ,  $0 \leq p(X = x_i) \leq 1$  et  $p(X = x_1) + p(X = x_2) + \dots + p(X = x_n) = 1$ .

## II. Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète

Soit  $X$  une variable aléatoire prenant  $n$  valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  avec les probabilités  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . L'espérance mathématique de  $X$  est :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

La variance de  $X$  est :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2 = E((X - E(X))^2).$$

Résultat admis :  $V(X) = (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ .

L'écart-type de  $X$  est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

## III. Exemples de lois discrètes

### 1) Loi équirépartie

La loi est dite équirépartie quand toutes les valeurs de  $X$  ont la même probabilité d'apparition.

Dans ce cas :  $p(X = x_1) = p(X = x_2) = \dots = p(X = x_n) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{card}\Omega}$

### 2) Loi binomiale (ou loi de BERNOULLI)

#### Epreuve de BERNOULLI

Une épreuve de BERNOULLI est une épreuve à deux éventualités (succès et échec, pile et face, blanc et pas blanc, obtenir le 1 ou pas quand on jette un dé...) dont les probabilités respectives sont notées  $p$  et  $1 - p$  ( $p$  étant un réel élément de  $[0, 1]$ ). Une telle épreuve est appelée **épreuve de BERNOULLI de paramètre  $p$** .

#### Schéma de BERNOULLI

Une expérience aléatoire consistant à répéter  $n$  fois ( $n$  étant un entier naturel non nul), de manière indépendante, une épreuve de BERNOULLI de paramètre  $p$  s'appelle un **schéma de BERNOULLI de paramètres  $n$  et  $p$** .

#### Loi binomiale

A un schéma de BERNOULLI de paramètre  $n$  et  $p$ , on peut associer la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de succès en  $n$  tentatives. Cette variable aléatoire prend donc les valeurs  $0, 1, 2, \dots, n - 1, n$ . La loi binomiale est la loi de probabilité associée à cette variable aléatoire et si  $k$  est un entier élément de  $\{0, 1, \dots, n\}$ , on a

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

#### Espérance variance et écart-type de la loi binomiale

L'espérance de la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$  est  $E(X) = np$  et la variance de la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$  est  $V(X) = np(1 - p)$ .