Exercices d'applications et de réflexions sur Structures algébriques

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

Exercices

TD :Structures algébriques(partie2)

Groupe anneau corps

Exercice 1: on pose $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall(x;y)\in I^2$

On muni I de la loi de composition définie par :

$x*y = ar\tan\left(-1+\tan x+\tan y\right)$

Montrer que $(I;*)$ est un groupe commutatif

Exercice 2: on muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne T définit par :

$(x;y)\mathrm{T}(x';y') = \left(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x}\right)$

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(x';y')\in\mathbb{R}^2$

Monter que $\left(\mathbb{R}^2;\mathrm{T}\right)$ groupe non commutative

Exercice 3: soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et tel que : $(a;b)\in G^2$

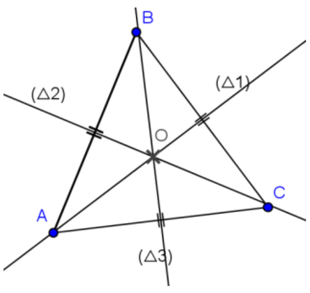
$(ab)^2 = a^2b^2$ Montrer que que ce groupe est commutatif

Exercice 4: (étude d'un groupe fini)

Montrer que $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};+\right)$ et $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}-\{\overline{0}\};\times\right)$ sont deux groupes commutatifs

Exercice 5: (étude d'un groupe fini)

(ABC) un triangle équilatéral



(Δ_1) la médiatrice du segment $[BC]$

(Δ_2) la médiatrice du segment $[AB]$

(Δ_3) la médiatrice du segment $[AC]$

Soit ζ l'ensemble des transformations suivantes : $\zeta = \{r_1;r_2;r_3;s_1;s_2;s_3\}$

r_1 la rotation de centre O et d'angle 0 : $r_1(O;0)$

r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$: $r_2\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)$

r_3 la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$: $r_3\left(O;\frac{4\pi}{3}\right)$

s_1 la symétrie axial d'axe: (Δ_1)

s_2 la symétrie axial d'axe : (Δ_2)

s_3 la symétrie axial d'axe : (Δ_3)

Montrer que : $(\zeta;\circ)$ est un groupe

Exercice 6: soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et e l'élément neutre de G

1) Montrer que si: $\forall(a;b)\in G^2$: $(a.b)^2 = a^2.b^2$ alors le groupe G est commutatif

2)Montrer que si: $\forall x\in G$: $x^2 = e$ alors le groupe G est commutatif

Exercice 7: (on considére l'ensemble des matrices suivante : $E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 0\end{pmatrix}/\,a\in\mathbb{R}\right\}$

Monter que E n'est pas un sous-groupe de $\left(M_2(\mathbb{R});+\right)$

Exercice 8: soit I l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs

montrer que $(I;+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z};+)$

Exercice 9: montrer que : $H=\left\{3^m7^n\,/\,m\in\mathbb{Z};n\in\mathbb{Z}\right\}$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^*;\times\right)$

Exercice 10: $U=\left\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z|=1\right\}$

Montrer que $(U;\times)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{C}^*;\times\right)$

Exercice 11: on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}\ln a & 0\\ 0 & \ln a\end{pmatrix}/\,a\in\mathbb{R}^{+*}\right\}$$

Monter que E est un sous-groupe de $\left(M_2(\mathbb{R});+\right)$

Exercice 12 : soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et soit $a\in G$

On pose : $C_a=\left\{x\in G\,/\,ax=xa\right\}$

(centralisateur de a)

Et : $Z(G)=\left\{x\in G\,/\,\forall y\in G: xy=yx\right\}$ (centre de G)

Montrer que C_a et $Z(G)$ sont des sous-groupes de : $(G;\cdot)$

Exercice 13 : On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne définie par :

$x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\,;\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

1)soit l'application :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(\mathbb{R};*)$

2) En déduire la structure de $(\mathbb{R};*)$

Exercice 14 : on considére l'ensemble suivant :

$E=\left\{a+b\sqrt{3}\,/\,(a;b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

1)Monter que $(E;+)$ est un groupe commutatif

2) Monter que E est une partie stable de $(\mathbb{Q};\times)$

3) Monter que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

Exercice 15: Soit $(A;+;\times)$ un anneau.

Tel que : $x^2=x\quad\forall x\in A$ ($(A;+;\times)$ s'appelle anneauDe Boole)

1) calculer $(x+x)^2$

2)en déduire que : $x+x=0_A$ (0_A est l'élément neutre de $(A;+)$)

3)soient : $x\in A$ et $y\in A$

a) calculer $(x+y)^2$ en fonction de x et y

b) en déduire que $(A;+;\times)$ est commutatif

c) en déduire : $xy(x+y)$

4)on suppose que : $x\neq 0_A$ et $y\neq 0_A$ et $y\neq x$

a) montrer que : a) $x+y\neq 0_A$ b) $x+y\neq y$

5)déterminer le tableau de la somme pour les éléments : 0_A ; x ; y ; $x+y$

Exercice 16: soit (K, +, ×) un corps finit :

$K=\left\{0;e;x_1;x_2;...;x_m\right\}$; $m\in\mathbb{N}^*$

Avec : 0 (resp. e) l'élément neutre pour +(resp. ×).

1)montrer que : $-e$ et e sont les seuls élément de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi ×
2)montrer que le produit de tous les éléments de K est égal a $-e$

3)on considérant le corps $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};+;\times)$ avec n premier montrer que : $\overline{(n-1)!}+1\equiv 0[n]$

Exercice17: on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1)Monter que $(E;+)$ est un groupe commutatif

2)Monter que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

3)soit f l'application qui associe à chaque matrice $M_{(a;b)}$ de $E-\{0_2\}$ le nombre complexe : $a+ib\sqrt{2}$ de $\mathbb{C}^*$

a) Monter que f est un morphisme bijectif de ($E-\{0_2\}$, ×) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

b)en déduire la structure de ($E-\{0_2\}$, ×)

4) Monter que $(E;+;\times)$ est un corps

Exercice 18: Soit $(K;+;\times)$ un corps.

On note : 0_K l'élément neutre de $(K;+)$ et 1_K l'élément neutre de $(K;\times)$ et on suppose qu'il existe un homomorphisme f bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$

1)on suppose que $1_K+1_K=0_K$ ¨

montrer que : $f(K)=\{1_K\}$

2) on suppose que : $1_K+1_K\neq 0_K$ et on pose :

$\alpha=f^{-1}(1_K)$ et $\beta=f^{-1}(-1_K)$

a) montrer que : $\alpha+\alpha=\beta+\beta$

b) en déduire que $\alpha=\beta$

3) en déduire qu'il n'existe pas d'homomorphisme f bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$

Exercice19 :
1) On munit de la loi de composition interne définie par : $x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

2)On munit $\mathbb{R}^{+*}$ de la loi de $*$ composition interne définie par : $x*y=\sqrt[3]{x^2+y^2}\quad\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de n'a de symétrique pour $*$
.3)On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}\quad\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que l'application : $x\to x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R};*)$ vers $(\mathbb{R};+)$ En déduire que $(\mathbb{R};*)$ est un groupe commutatif

Exercice20: on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$G=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2+b^2=1 et (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1)Monter que : $G\neq\varnothing$

2)Monter que : $G=\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} / \theta\in\mathbb{R}\right\}$

3)Monter que G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

4) est ce que G est une partie stable de $\left(M_2(\mathbb{R});+\right)$?

5)on pose : $M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

calculer $M^n(\theta)\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

ou : $M^n(\theta)=\underbrace{M(\theta)\times M(\theta)\times\ldots\times M(\theta)}_{nfois}$

6) soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans G tel que :

$f(\theta)=M(\theta)$

a) Monter que f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$

b)en déduire la structure de $(G;\times)$

7) soit l'ensemble : $U=\left\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\right\}$

a) Monter que : $U=\left\{e^{i\theta}/\theta\in\mathbb{R}\right\}$

b)Monter que $(U;\times)$ est un groupe commutatif

Exercice 21: Soit $(A;+;\times)$ un anneau.

Et 1_A est l'élément neutre de $(A;\times)$

soient : $a\in A$ et $b\in A$ tels que :

a) $ab+ba=1_A$

b) $a^2b+ba^2=a$

1)montrer que : $a^2b=ba^2$

2)montrer que : $aba+aba=a$

3)en déduire que : $ab=ba$

Exercice22: Soit $(K;+;\times)$ un corps.

On note : 1_K l'élément neutre de $(K;\times)$

Soient x et y deux éléments de $K-\{0_K\}$

Qui vérifient les conditions suivantes :

a) $x+y=1_K$ b) $x^{-1}+y^{-1}=1_K$

avec : x^{-1} le symétrique de x pour la loi $\times$

1)montrer que : $xy=yx=-1_K$

2)montrer que : $x^4+y^4=7.1_K$

Avec : $7.1_K=\underbrace{1_K+1_K+\ldots+1_K}_{7\ fois}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien