

## ETUDE DE FONCTIONS

### EXERCICE (1)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)$

- 1) étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de 0
- 2) a) calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
b) étudier la branche infinie de la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 3) a) montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$   
b) étudier les variations de  $f$  et dresser sa table de variation
- 4) montrer que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}^+$  vers un intervalle  $I$  à déterminer
- 5) tracer dans un même repère les courbes  $(C_f)$  et  $(\Gamma_{f^{-1}})$

### EXERCICE (2)

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \arctan\left(x\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}\right) & x^2 \neq 1 \\ f(1) = \frac{\pi}{2} & ; \quad f(-1) = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

- 1) déterminer le domaine de définition  $D_f$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche de 0 et à droite de 1 et  $-1$
- 3) Calculer  $f'(x)$  puis donner le tableau de variation de  $f$
- 4) soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $[-1, 0]$ 
  - a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $[-1, 0]$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera
  - b) exprimer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$

### EXERCICE (3)

soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} & ; \quad x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & ; \quad x < 2 \end{cases}$$

- 1) a) étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$   
b) étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche et à droite du point 2
- 2) calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$
- 3) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis étudier la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 4) a) calculer la fonction dérivée sur  $]-\infty, 2[$  et  $]2, +\infty[$   
b) étudier les variations de  $f$  et dresser sa table de variation
- 5) soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $]-\infty, 2[$ 
  - a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $]-\infty, 2[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera
  - b) exprimer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$

## ETUDE DE FONCTIONS

### EXERCICE (4)

on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \arctan \sqrt{x+2} & ; \quad x \geq -2 \\ f(x) = x+2 - \sqrt{x^2+2x} & ; \quad x < -2 \end{cases}$$

- 1) a) montrer que  $f$  est continue au point  $-2$   
 b) étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche et à droite du point  $-2$
- 2) a) calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
 b) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$
- 3) a) calculer  $f'(x)$  sur chacun des intervalles  $]-\infty, -2[$  et  $]-2, +\infty[$   
 b) étudier les variations de  $f$  et dresser sa table de variation
- 4) a) montrer que  $(\forall x \in ]-\infty, -2[) f(x) \geq 2x + 3$   
 b) tracer la courbe  $(C_f)$
- 5) soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $]-\infty, -2[$   
 a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $]-\infty, -2[$  vers un intervalle  $J$  à déterminer  
 b) calculer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$   
 c) tracer dans le repère précédant la courbe de la fonction réciproque  $g^{-1}$
- 6) soit  $(U_n)_n$  la suite définie par :  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   
 a) montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une seule solution  $\alpha$  dans  $[1, 2]$   
 b) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \arctan x \leq x$   
 c) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 < U_n \leq 2$   
 d) étudier la monotonie de la suite  $(U_n)_n$  puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite

### EXERCICE (5)

I] on considère la fonction  $h$  définie sur  $]-\infty, 0[$  par :  $h(x) = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x-1}{x^2+1}$

- 1) calculer  $h'(x)$  et montrer que  $h$  est strictement décroissante
- 2) déduire que  $(\forall x < 0) h(x) < 0$
- 3) montrer que  $(\forall x < 0) x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2}$

II] soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\infty, 0]$  par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

## ETUDE DE FONCTIONS

- 1) a) montrer que  $f$  est continue à gauche de 0  
 b) étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche du point 0
- 2) a) calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$   
 b) étudier la branche infinie de la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$
- 3) montrer que  $(\forall x < 0) f'(x) = (x-1)h(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$
- 4) tracer la courbe  $(C_f)$   
 ( on donne  $(C_f)$  coupe la droite  $(\Delta)y = x - 2$  en un point d'abscisse  $\alpha \approx -0,5$   
 Et  $(C_f)$  est situé au dessous de  $(\Delta)$  dans  $]-\infty; \alpha[$  )

### EXERCICE (6)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} - \text{Arc tan}(\sqrt{x})$

- 1) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) étudier le sens de variation de la fonction  $f$
- 3) on considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{\text{Arc tan } \sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ 
  - a) déterminer  $D_g$
  - b) déterminer les limites de  $g$  aux bornes de  $D_g$
  - c) étudier la dérivabilité de  $g$  à droite de 0 puis donner une interprétation géométrique du résultat
  - d) calculer  $g'(x)$  et étudier les variations de la fonction  $g$
- 5) soit  $h$  la restriction de  $g$  sur  $[0; 1[$  . montrer que  $h$  est une bijection de  $[0; 1[$  vers un intervalle à déterminer
- 6) tracer les courbes  $(C_g)$  et  $(C_{h^{-1}})$

Etudier les fonctions :

- 1)  $f(x) = \sqrt{1+x^2} \arctan x$
- 2)  $f(x) = |x-1| + \arctan |x|$
- 3)  $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}\right)$  si  $x < 1$  et  $f(1) = \frac{\pi}{2}$
- 4)  $f(x) = x \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$
- 5)  $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$