Ensemble des nombres réels et sous-ensembles

Leçon : Ensemble des nombres réels et sous-ensembles
Présentation globale

I.Ensembles de nombres.

Il existe différentes sortes de nombres. Pour les classer, on les a regroupés dans différents ensembles remarquables :

1°) L'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N}$

Rappel de notations : $\mathbb{N}=\{0 ; 1 ; 2 ; ... ; n ; ...\}$, $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\backslash\{0\}$ ($\mathbb{N}$ privé de 0).

2°) L'ensemble **des entiers relatifs :** $\mathbb{Z}$

Tous les entiers qu'ils soient négatifs, positifs ou nuls, sont des entiers relatifs

Exemple : -45, -1, 0 et 56 sont des entiers relatifs.

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$. Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs. On dit alors que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclu dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ Cette inclusion est notée : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ Le symbole "$\subset$" signifie "est inclu dans".

notations : $\mathbb{Z}=\{... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... \}$

$\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ($\mathbb{Z}$ privé de 0) ;

3°) L'ensemble des décimaux. $\mathbb{D}$

3-1) L'ensemble des décimaux est l'ensemble des nombres dits "à virgule". Cet ensemble est noté $\mathbb{D}$.

Par exemple, -3,89 et 5,2 sont des décimaux. Ils peuvent être négatifs ou positifs.

Les entiers relatifs sont aussi des décimaux.

En effet : -4 = -4,000

on dit alors que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est inclu dans l'ensemble $\mathbb{D}$.

Ce qui se note : $\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}$

donc on a : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}$

$D=\left\{a\times10^{-n}=\frac{a}{10^n} / a\in\mathbb{Z};n\in\mathbb{N}\right\}$ Écriture en compréhension

3-2) critère pour reconnaître un nombre décimal sous forme fractionnaire :

Pour savoir si un nombre rationnel est décimal ou pas, on peut mettre ce nombre sous la forme **d'une fraction irréductible** ; si le dénominateur est de la forme $2^p\times5^q$, p et q étant des entiers naturels, alors ce nombre est décimal, sinon il ne l'est pas.

Exemples : Les nombres $\frac{54}{40},\frac{126}{450},\frac{75}{90}$ sont-ils des décimaux ?

4°) L'ensemble des rationnels. $\mathbb{Q}$

Les nombres rationnels sont les fractions de la forme p/q où p et q sont des entiers (non nul pour q). .

Par exemple, 2/3 et -1/7 sont des rationnels.

Tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels exemple 1,59. C'est en fait le quotient des entiers 159 et 100 car 159 / 100 = 1,59.

De même, tous les entiers sont des décimaux. Prenons l'exemple de -4. On peut dire que -4 est le quotient de -4 et de 1 car -4 / 1 = -4.

On résume cela par : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} / a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N}^*\right\}$ Écriture en compréhension

$\frac{1}{3}=0.333333.......$ est rationnel mais $\frac{1}{3}\notin D$

Remarque1 : un rationnel non décimal a une écriture décimale périodique infinie :

$\frac{17}{7}=2.428571428571428571428571428571\ldots$;

428571 se répète

Remarque2: $\sqrt{2}\notin Q$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}\notin Q$; $\pi\notin Q$

5°) L'ensemble des réels. $\mathbb{R}$

Tous les nombres utilisés en Seconde sont des réels. Cet ensemble est noté $\mathbb{R}$.

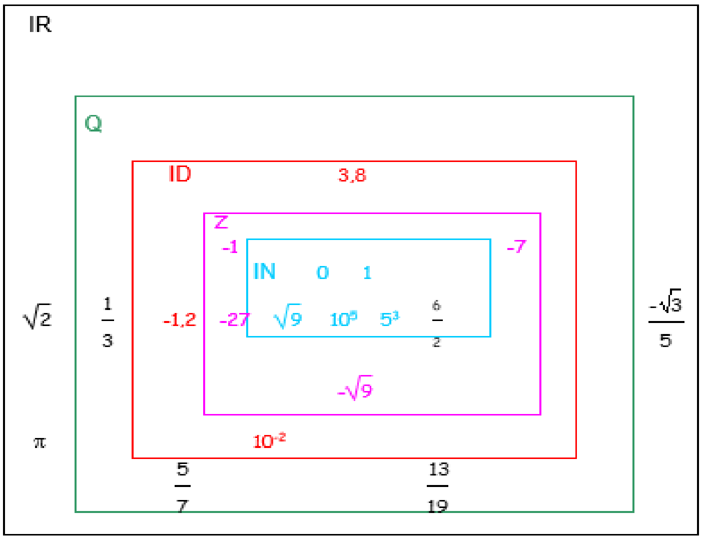
Remarque1 : Parmi les nombres réels, il y a les entiers naturels, les entiers relatifs, les nombres décimaux, les nombres rationnels. Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés nombres irrationnels.

Et on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Remarque2 : un irrationnel a une écriture décimale non périodique infinie :

Par exemple : 1.4142135623730950488016887242097 …

6°) Représentation par ensembles



Remarque3 :

- « soit x un nombre quelconque » sera désormais remplacé par : « soit $x \in \mathbb{R}$ » ou « soit x un nombre réel »
- Le signe * placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombres, prive celui-ci de zéro.

Ainsi $\mathbb{R}^*$ désigne les réels non nuls.

- Le signe + ou - placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombre, prive celui-ci des nombres négatifs positifs

Ainsi $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs (avec zéro)

$\mathbb{R}^-$ désigne l 'ensemble des réels négatifs (avec zéro)

Exercice1 : compléter par : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

$$6...\mathbb{Z} \; ; \; \frac{2}{3}...\mathbb{Q} \; ; \; \sqrt{2}...\mathbb{Q} \; ; \; \sqrt{2}...\mathbb{R} \; ; \; \mathbb{Q}...\mathbb{R} \; ; \; \mathbb{N}...\mathbb{Q} \; ;$$

$$-\frac{2}{3}...\mathbb{R}^+ \; ; \; \frac{2}{3}...\mathbb{N} \; ; \; \frac{6}{2}...\mathbb{N} \; ; \; \frac{\sqrt{100}}{5}...\mathbb{N} \; ; \; \mathbb{Q}...\mathbb{Z} \; ; \; \mathbb{Z}...\mathbb{Q} \; ;$$

$$\pi...\mathbb{Z} \; ; \; 0...\mathbb{Q}^* \; ; \; -\frac{7}{3}...\mathbb{Q}^{+*} \; ; \; \sqrt{16}...\mathbb{N} \; ; \; 0...\mathbb{R}^* \; ;$$

$$\{1;3;-8\}...\mathbb{N} \; ; \; \mathbb{R}^+...\mathbb{R} \; ; \; \frac{1}{2}...D \; ; \; \frac{1}{3}...D$$

Solution : $6 \in \mathbb{Z}$; $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{R}^+$; $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$; $\frac{6}{2} \in \mathbb{N}$; $\frac{\sqrt{100}}{5} \in \mathbb{N}$; $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Z}$; $0 \notin \mathbb{Q}^*$; $-\frac{7}{3} \notin \mathbb{Q}^{+*}$; $\sqrt{16} \in \mathbb{N}$;

$0 \notin \mathbb{R}^*$; $\{1;3;-8\} \not\subset \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$; $\frac{1}{2} \in D$; $\frac{1}{3} \notin D$

II) opérations et règles de calcul dans l'ensemble des nombres réels

$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$

$a+b=b+a$; $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$

$-a$ L'opposé de a

$(-a)+a=a+(-a)=0$ et $a+0=0+a=a$

$a-b=a+(-b)$ et $-(a-b)=-a+b$

$a\times b=b\times a=ab=ba$ et $a(bc)=(ab)c=(ac)b=abc$

Si : $a \neq 0; a\times\frac{1}{a}=1$ $\frac{1}{a}$ l'inverse de a et $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$

$k(a+b)=ka+kb$ et $k(a-b)=ka-kb$

$(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$

Si $bd \neq 0$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ et $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ et $k\times\frac{a}{b}=\frac{ak}{b}$

$\frac{\frac{a}{b}}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b};bc\neq 0$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

Si on a : $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ alors $a+c=b+d$

Si $bd \neq 0$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si et seulement si ad=bc

$\frac{a}{b}=0$ ssi $a=0$

Exercice 2 : calculer **et** simplifier : $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}$

$B=\frac{-2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2$ $C=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2$ $D=\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}$

$E=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)$ $F=\frac{7-\frac{4}{\pi}}{12-21\pi}$

$G=\left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)+(b-c)\right]$

Solution : $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}=\frac{9}{12}+\frac{20}{12}-\frac{14}{12}=\frac{9+20-14}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

$B=\frac{-2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2=\frac{-8}{12}+\frac{14}{12}-\frac{3}{12}-\frac{24}{12}=\frac{-8+14-3-24}{12}=\frac{-21}{12}=-\frac{7}{4}$

$C=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{4-15}{6}\right)^2=\left(\frac{-11}{6}\right)^2=\frac{(-11)^2}{6^2}=\frac{121}{36}$

$$D=\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{16}{3}\times\frac{2}{1}=\frac{32}{3}$$

$$E=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{10}+\frac{10}{10}-\frac{5}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{4+10-5}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{10}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{3\times3}{5\times2}=\frac{3}{5}$$

$$F=\frac{7-\frac{4}{\pi}}{12-21\pi}=\frac{\frac{7\pi-4}{\pi}}{\frac{12-21\pi}{1}}=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{12-21\pi}=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{12-21\pi}$$

$$F=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{-3(7\pi-4)}=-\frac{1}{3\pi}$$

$$G=\left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)+(b-c)\right]=(a-c-a+b)-(c-a+b-c)$$

$$G=a-c-a+b-c+a-b+c=a-c$$

III)Racine carrée

Activité : On considère un triangle ABC rectangle en A

1)Sachant que AB = 3 cm et AC = 4 cm,

a) Calculer la valeur exacte de BC.

b) Quels sont les nombres qui ont pour carré 25 ? Pourquoi a-t-on BC = 5 ?

c) Compléter la phrase suivante :

« BC est le nombre positif dont le carré est … »

2)On suppose maintenant que AB = 2 cm et AC = 3 cm.

« BC est le nombre positif dont le carré est ... »

Rechercher la valeur exacte de BC

On dira que la valeur exacte de BC est **la racine carrée** de 13 que l'on notera $\sqrt{13}$

3)Peut-on obtenir la racine carrée de -16 ?

La racine carrée d'un nombre négatif existe-t-elle ?

<u>Définition :</u> a est un nombre **positif**. La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est Égal à a.

<u>exemple :</u> $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{0}=0$

$\sqrt{1}=1$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{16}=4$; ... $\sqrt{225}=15$

$\sqrt{1,5625}=1,25$; $\sqrt{36000000}=6000$

Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

<u>Propriétés :</u> soient a et b deux nombres positifs ou nuls

1) $\left(\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a^2}=a$ 2) $\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n};n\in\mathbb{N}^*$

3) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};b\succ0$

<u>Remarque :</u> $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

En effet : $\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}$ car : $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Et $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

<u>Propriété :</u> $x\geq0$ et $y\geq0$

$\sqrt{x}=\sqrt{y}$ ssi $x=y$

<u>Propriété :</u> $a\in\mathbb{R}^+$

$x^2=a$ si et seulement si $x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$

<u>Exemple :</u> résoudre l'équation suivante $x^2=100$

$x^2=100$ si et seulement si $x=\sqrt{100}$ ou $x=-\sqrt{100}$ ssi $x=10$ ou $x=-10$

Donc : $S=\{-10;10\}$

<u>Quelques valeurs exactes à connaître :</u>

a	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
√a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$\sqrt{0}=0;\ \sqrt{1}=1;\ \sqrt{4}=2;\ \sqrt{9}=3;\ \sqrt{16}=4;$

$\sqrt{25}=5;\ \sqrt{36}=6;\ \sqrt{49}=7;\ \sqrt{64}=8;\ \sqrt{81}=9;$

$\sqrt{100}=10;\ \sqrt{121}=11;\ \sqrt{144}=12;\ \sqrt{169}=13;$

$\sqrt{196}=14;\sqrt{225}=15;\ \sqrt{625}=25.$

<u>Exercice 3 :</u> calculer **et** simplifier :

$A=\sqrt{\frac{9}{2}}$; $B=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$; $C=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}$

$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$; $E=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

<u>Solution :</u> $A=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$B=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{28}{14}}=\sqrt{2}$$

$$C=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}=3\sqrt{4\times5}+4\sqrt{9\times5}-2\sqrt{16\times5}-\sqrt{36\times5}$$

$$C=3\times2\sqrt{5}+4\times3\sqrt{5}-2\times4\sqrt{5}-6\sqrt{5}=6\sqrt{5}+12\sqrt{5}-8\sqrt{5}-6\sqrt{5}=(6+12-8-6)\sqrt{5}$$

$$C=4\sqrt{5}$$

$$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\right)$$

$$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-5=3+2\sqrt{3\times2}+2-5$$

$$D=2\sqrt{6}$$

$$E=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$$

$$E=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$E=\frac{3+2\sqrt{15}+5-\left(3-2\sqrt{15}+5\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3+2\sqrt{15}+5-3+2\sqrt{15}-5}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{15}}{-2}=-2\sqrt{15}$$

<u>Exercice 4 :</u> soit $E=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

Montrer que : E est nombre entier relatif

<u>Solution :</u>

$$E=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\frac{\left(5\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)+-5\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}$$

$$E=\frac{5\sqrt{7}\sqrt{2}+5\sqrt{7}\sqrt{7}+5\sqrt{2}\sqrt{2}-5\sqrt{2}\sqrt{7}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{35+10}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{45}{-5}=-9\in\mathbb{Z}$$

<u>Exercice 5 :</u> calculer **et** simplifier

$$A=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$$

Solution : $A=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$

$A=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2}\right)}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$

$A=\sqrt{2-\sqrt{2}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

Exercice6 : Rendre le dénominateur rationnel du quotient suivant: $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

Solution : on multiplie le dénominateur par son conjugué

$A=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}+1$

IV)Les Puissances

1)Définition et notations : $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$

Le produit de n facteurs égaux à a et noté a^n et s'appelle la puissance $n^{\text{-ième}}$ de a » ; n est appelé exposant :

$a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{\text{عدد المرات}}$ Cas particulier : $a^1=a;a^0=1$

et on a : $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ En particulier : Pour $a\neq 0$ $\quad a^{-1}=\dfrac{1}{a}$

$10^n=\underbrace{1000\cdots0}_{n};n\in\mathbb{N}$ (n zéros)

$10^{-n}=\underbrace{0,000\cdots01}_{n};n\in\mathbb{N}$ (n zéros)

$10^1=10$; $10^{-1}=0,1$; $10^{-2}=0,01$; $10^0=1$

2)Propriétés des puissances : $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$; $m\in\mathbb{N}^*$ 1)

$\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ $\quad a^n\times b^n=(ab)^n$; $\left(a^n\right)^m=a^{nm}$; $a^n\times a^m=a^{n+m}$;

$\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

3)Remarque : a) La puissance d'un nombre négatif est positive si l'exposant est pair

b) La puissance d'un nombre négatif est négative si l'exposant est impair.

Ex : $(-1)^{2020}=1^{2020}=1$ **et** $(-1)^{2019}=-1^{2019}=-1$

Exercice7 : simplifier et écrire sous forme d'une puissance

$A=2^3\times\left(2^2\right)^4\times\left(2^{-5}\right)^3$ $\qquad B=(-3)^1\times(-3)^5\times(3)^2\times(-3)^{-10}$

$C=\dfrac{3^{-5}\times 4^{-2}}{12^3}\times\dfrac{9}{2^2}$ $\qquad D=\dfrac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times 8}{1024\times(-16)^{-4}}$

$E=\dfrac{10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}}{10^{-2}\times10^3\times10^5}$

Solution :

$A=2^3\times\left(2^2\right)^4\times\left(2^{-5}\right)^3=2^3\times2^{2\times4}\times2^{-5\times3}=2^{3+8-15}=2^{-4}$

$A=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$

$B=(-3)^1\times(-3)^5\times(3)^2\times(-3)^{-10}=-(3)^1\times-(3)^5\times(3)^2\times(3)^{-10}$

$B=3^1\times3^5\times3^2\times3^{-10}=3^{1+5+2-10}=3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

$C=\dfrac{3^{-5}\times4^{-2}}{12^3}\times\dfrac{9}{2^2}=\dfrac{3^{-5}\times\left(2^2\right)^{-2}}{\left(3\times2^2\right)^3}\times\dfrac{3^2}{2^2}=\dfrac{3^{-5}\times(2)^{-4}\times3^2}{(3)^3\times2^6\times2^2}$

$C=\dfrac{3^{-5}\times(2)^{-4}\times3^2}{(3)^3\times2^6\times2^2}=3^{-5}\times2^{-4}\times3^2\times(3)^{-3}\times2^{-6}\times2^{-2}=3^{-5-3+2}\times2^{-4-6-2}$

$C=3^{-6}\times2^{-12}$

$D=\dfrac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}=\dfrac{-2^3\times4^{2\times(-1)}\times2^3}{1024\times\left(-2^3\right)^{-4}}=\dfrac{-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times2^3}{2^{10}\times\left(-2^3\right)^{-4}}$

$D=-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times2^3\times2^{-10}\times(-2)^{3\times4}=-2^{3-4+3-10+12}=-2^4=-16$

$E=\dfrac{10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}}{10^{-2}\times10^3\times10^5}=10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}\times10^2\times10^{-3}\times10^{-5}$

$E=10^{-8+9+7-4+2-3-5}=10^{-2}=\dfrac{1}{10^2}=\dfrac{1}{100}=0.01$

4°) Écriture scientifique d'un nombre décimal

La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a\times10^p$ où a est un nombre décimal ($1\leq a\prec 10$) et p un nombre entier relatif.

Ex : $593,7=5,937\times10^2$ et $7300=7,3\times10^3$

$2328423=2,328423\times10^6$ et $-0,051=-5,1\times10^{-2}$

$-0,00032=-3,2\times10^{-4}$ sur la calculatrice -3.2 E-4

Exercice 8 : Ecrire en notation scientifique le nombre

$A=9\times10^{-3}+0,4\times10^{-2}-9\times10^{-4}$ en mettant d'abord 10^{-4} en facteur et sans utiliser de calculatrice.

V) Identités remarquables : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 4) $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

5) $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab-b^2\right)$ Somme de deux cubes

6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ Cube d'une Somme

7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ Cube d'une différence

Ces formules sont pour **développer** et pour **factoriser**

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un **produit**.

Exemple1: $x\in\mathbb{R}$ développer et calculer et simplifier

$A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$ et $B=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2$

$C=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ $\qquad D=(3x-2)^3$ $\qquad E=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

(Lorsque la calculatrice tombe en panne ou ne peut pas calculer)

Solution :

$A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$

$A=5+2\sqrt{10}+2-\left(5-2\sqrt{10}+2\right)=5+2\sqrt{10}+2-5+2\sqrt{10}-2=4\sqrt{10}$

$B=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2=(2-3)^2=(-1)^2=1$

$C=\left(\sqrt{2}+1\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3+3\left(\sqrt{2}\right)^2\times 1+3\sqrt{2}(1)^2+(1)^3=2\sqrt{2}+3\times 2+3\sqrt{2}+1$

$C=5\sqrt{2}+7$

$D=(3x-2)^3=(3x)^3-3(3x)^2\times 2+3\times 3x\times(2)^2-(2)^3$

$D=27x^3-54x^2+36x-8$

$E=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)=(x+2)\left(x^2-2\times x+2^2\right)=x^3+2^3=x^3+8$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times 200520052007)$

On remarque que les nombres : 200520052006 et 200520052005 Et 200520052007 différent par leurs chiffes des unités

Pour simplifier on pose : $x=200520052006$

Donc : $200520052005=x-1$ et $200520052007=x+1$

Donc : $F=x^2-(x-1)(x+1)$

$=x^2-\left(x^2-1\right)=x^2-x^2+1=1$ Donc : $F=1$

Exemple2: Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

1) $49x^2-81$ 2) $16x^2 - 8x + 1$ 3) x^3-8

4) C = (a + 1) (2a - 3) + 6(a + 1) D = $27x^3 + 1$

Solution :1) On regarde l'expression, pour choisir l'identité remarquable à appliquer.

L'expression semble être de la forme : $a^2 - b^2$.

$49x^2-81=(7x)^2-9^2=(7x-9)\times(7x+9)$ il s'agit d'un produit. L'expression est factorisée.

2) $16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2-8x+1^2=(4x)^2+2\times(4x)\times+1=(4x-1)^2$

3) $x^3-8= \mathbf{x}^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+2^2)=(x-2)(x^2+2x+4)$

4) (a + 1) est le facteur commun.

C = (a + 1)(2a - 3 + 6) Donc C = (a + 1) (2a +3)

5)D = $27x^3 + 1$ -> Il n'y a pas de facteur commun.

-> L'expression semble être de la forme $a^3+ b^3$.

D = $27x^3 + 1=(3x)^3 - 1^3=(3x+1)((3x)^2 -1(3x) +1^2)$

= $(3x+1)(9x^2 - 3x +1)$

Donc : **Méthodes** : Pour factoriser une expression, on doit :

- identifier une identité remarquable ou
- identifier un facteur commun

Attention : on ne peut pas toujours factoriser une expression

exemple :$16x^2 + 8x + 3 = (4x+1)^2 + 2$; cette expression ne peut pas être factorisée sous la forme d'un produit de deux facteurs de degré 1

Exercice9 : Remplissez les blancs suivants :

$10-4\sqrt{6}=(...-...)^2$ et $4+2\sqrt{2}=(...+...)^2$

Solution :1)

$4+2\sqrt{3}=4+2\times\sqrt{3}\times 1=3+2\times\sqrt{3}\times 1+1=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}\times 1+(1)^2$

$4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

$10-4\sqrt{6}=10-2\times 2\times\sqrt{6}=(2)^2+2\times\sqrt{6}\times 2+\left(\sqrt{6}\right)^2$

$10-4\sqrt{6}=\left(2-\sqrt{6}\right)^2$

Exercice 10 : $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}^*$ et $a\geq b$

Montrer que : $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)$

Solution : pour montrer que deux nombres positifs sont égales on pourra montrer que leurs carrés sont égaux

$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2=a+\sqrt{a^2-b^2}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)^2$

$=\frac{2}{4}\times\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)^2=\frac{1}{2}\times\left(\left(\sqrt{a-b}\right)^2+2\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right)$

$=\frac{2}{4}\times\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)^2=\frac{1}{2}\times\left(a-b+2\sqrt{(a-b)(a+b)}+a+b\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(2a+2\sqrt{(a-b)(a+b)}\right)=a+\sqrt{(a-b)(a+b)}=a+\sqrt{a^2-b^2}$

Donc on a : $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)\right)^2$

Donc : $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)$

Exercice 11 : Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

$A=16x^2-8x+1$; $B=16-25x^2$; $C=1-(1-3x)^2$

$D=(2x-1)^3-8$; $E=27+x^3$; $F=x^{12}-2x^6+1$

$H=x^3+1+2\left(x^2-1\right)-(x+1)$ et $G=x^5+x^3-x^2-1$

Solution : $A=16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times 4x\times 1+1^2=(4x-1)^2$

$B=16-25x^2=(4)^2-(5x)^2=(4-5x)(4+5x)$

$C=1-(1-3x)^2=1^2-(1-3x)^2=(1-(1-3x))(1+(1-3x))$

$C=(1-1+3x)(1+1-3x)=3x(2-3x)$

$D=(2x-1)^3-8=(2x-1)^3-2^3=$

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

donc : $D=((2x-1)-2)\left((2x-1)^2+(2x-1)\times 2+2^2\right)$

$D=(2x-3)\left((2x)^2-4x+1+4x-2+4\right)=(2x-3)\left(4x^2+3\right)$

$E=27+x^3=3^3+x^3=(3+x)\left(3^2-3x+x^2\right)$

On a : $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab-b^2\right)$

$E=(3+x)\left(9-3x+x^2\right)$

$F=\left(x^6\right)^2-2x^6+1=\left(x^6\right)^2-2x^6\times 1+1^2=\left(x^6-1\right)^2$

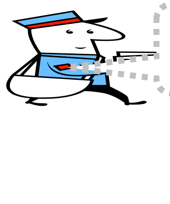
$G=x^5+x^3-x^2-1=x^3\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)=\left(x^3-1\right)\left(x^2+1\right)$

$H=x^3+1+2\left(x^2-1\right)-(x+1)=x^3+1^3+2\left(x^2-1^2\right)-(x+1)$

$H=(x+1)\left(x^2-x+1^2\right)+2(x+1)(x-1)-(x+1)$

$H=(x+1)\left(x^2-x+1+2(x-1)-1\right)=(x+1)\left(x^2-x+1+2x-2-1\right)$

$H=(x+1)\left(x^2+x-2\right)$



Factoriser c'est écrire sous la forme d'un **produit**