I. Produit scalaire de deux vecteurs :

A. Norme d'un vecteur :

a. Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan (P) , A et B deux points de (P) tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

La distance entre A et B est notée par AB ou encore $\|\overrightarrow{AB}\|$. On lit la norme du vecteur $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$.

Donc $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

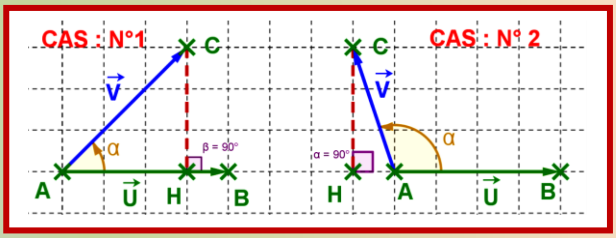
B. Produit scalaire de deux vecteurs :

a. Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{v}=\vec{0}$ ou $\vec{u}=\vec{0}$ on a : $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A\neq B$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$) alors



- ❖ $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens . (1er cas)
- ❖ $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont les sens opposés. (2ième cas)

b. Remarque :

- La projection orthogonale de B sur la droite (AB) est B d'où : $\vec{u}.\vec{u}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB\times AB=AB^2\geq 0$ on note $\vec{u}.\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ par $\vec{u}^2$ ou $\overrightarrow{AB}^2$ on lit le carré scalaire de est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$ ou de $\overrightarrow{AB}$
- $\vec{u}^2$ est nombre positif de même $\overrightarrow{AB}^2$ est nombre positif .
- On a : $\overrightarrow{AB}^2=AB^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2$ d'où $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ de même on a $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$
- $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

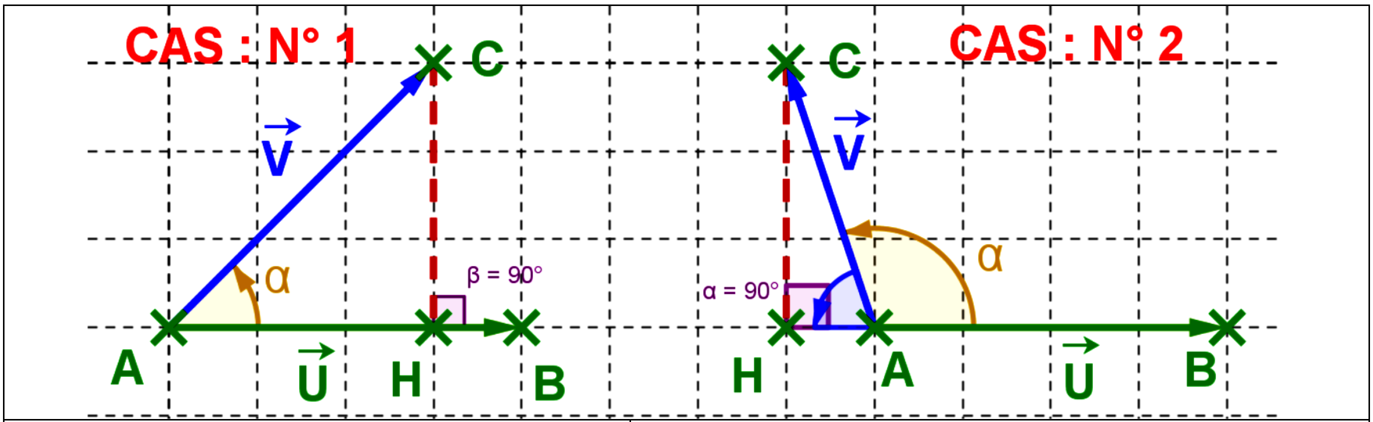
II. La forme trigonométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls : ($\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$)

A. La forme trigonométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls :

a. Activité :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
- et H la projection orthogonale du point C sur la droite (AB) ($A\neq B$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$).
- On considère l'angle($\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$) et de mesures $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\alpha\ [2\pi]$.

1. Pour chaque cas exprimer AH en fonction de AC et $\cos\alpha$.



1^{er} cas :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens)

On a : $\cos\alpha = \dfrac{AH}{AC}$ d'où $AH = AC \times \cos\alpha$

Donc : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB \times AH$

$= AB \times AH \times \cos\alpha$

Conclusion :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

$= AB \times AH \times \cos\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$

$2^{ième}$ cas :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont les sens opposés)

On a : $\cos(\pi - \alpha) = \dfrac{AH}{AC}$

d'où $-\cos\alpha = \dfrac{AH}{AC}$ (car $\cos(\pi - x) = -\cos x$)

$AH = AC \times \cos(\pi - \alpha) = AC \times (-\cos\alpha)$

Donc : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = AB \times AH \times \cos\alpha$

Conclusion :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH = AB \times AH \times \cos\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$

b. Propriété 1 :

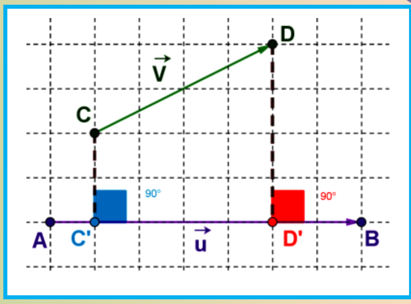
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\left(\overline{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \alpha \ (2\pi)$
- La forme trigonométrique du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC\cos\alpha$ ou encore $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\alpha$

c. Remarque :

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est :

le nombre réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ tel que D' et C' sont respectivement les projections orthogonales de C et D sur la droite (AB) .



B. Orthogonalité de deux vecteurs :

a. Activité :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

1. Donner la forme trigonométrique de $\vec{u}.\vec{v}$.

2. Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales .

b. Propriété 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan (P) , on a :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$, on note $\vec{u}\perp\vec{v}$.

C. Propriétés du produit scalaire :

a. Propriétés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan (P) , on a

1. Linéarité du produit scalaire : $\begin{cases}(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}\\ \vec{w}.(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{v}\\ (\alpha\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha\times(\vec{u}.\vec{v})\end{cases}$.
2. Positivité du produit scalaire : $\vec{u}^2\geq 0$.
3. produit scalaire est non dégénéré : $\vec{u}.\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$.

b. conséquences :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan (P) , on a

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$.
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$.
3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$.
4. $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$.

c. Démonstration (pour la 1ère propriété)

On a : $(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$; (car $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$)

Conclusion : $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

d. Exemple : $\vec{u}.\vec{v}=7$ et $\|\vec{u}\|=4$ et $\|\vec{v}\|=7$.

1. Calculons : $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u}$

   On a : $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u}=\vec{u}^2+\vec{v}.\vec{u}$

$$= \left\|\vec{u}\right\|^2 + \vec{u}.\vec{v}$$

$$= 4^2 + 7 = 23$$

Conclusion : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\vec{u} = 23$

2. **Calculons :** $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$.

On a : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$$= \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$$

$$= 4^2 + 2\times 7 + 7^2$$

$$= 79$$

Conclusion : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = 79$.

3. **Calculons** $\left(2\vec{u}\right)\left(-4\vec{v}\right)$

On a : $\left(2\vec{u}\right)\left(-4\vec{v}\right) = 2\times(-4)\times\vec{u}.\vec{v}$

$$= -8\times 7$$

$$= -56$$

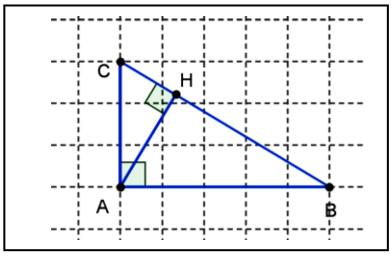
Conclusion : $\left(2\vec{u}\right)\left(-4\vec{v}\right) = -56$

III. Applications du produit scalaire :

A. Les relations métriques dans un triangle rectangle :

a. Activité :

ABC est un triangle rectangle en A ; le point H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC) .



1. Calculer $\cos B$ en utilise les deux triangles ABC et ABH.
2. Montrer que : $BA^2 = BH\times BC$.
3. Montrer que :
   - ❖ $AH^2 = AB^2 - HB^2$ puis $AH^2 = AC^2 - HC^2$.
4. En déduit que : $2AH^2 = BC^2 - \left(HB^2 + HC^2\right)$.
5. On remarque que : $\left(HB+HC\right)^2 - 2HB\times HC = BC^2 - 2HB\times HC$. On déduit $AH^2 = HB\times HC$

b. Propriété :

ABC est un triangle rectangle en A ; le point H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC) .

On a :

- $BC^2 = BA^2 + AC^2$.
- $BA^2 = BH\times BC$ et $CA^2 = CH\times CB$.
- $AH^2 = HB\times HC$.

On les appelle les relations métriques dans un triangle rectangle .

B. Théorème d' El Kashi : (غياث الدين الحمشي الكاشي) :

a. Théorème d' El Kashi :

Dans tout triangle ABC on pose $AB = c$ et $AC = b$ et $BC = a$ on a :

- $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$ ou encore $a^2 = c^2 + b^2 - 2c \times b \cos A$.
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B$ ou encore $b^2 = c^2 + a^2 - 2c \times a \cos B$.
- $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \times CB \cos C$ ou encore $c^2 = b^2 + a^2 - 2b \times a \cos C$.

b. Démonstration :

On a : $$BC^2 = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)^2$$
$$= BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$$
$$= BA^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

Conclusion : $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$.

c. Exemple :

On calcule AC sachant que : $BA = \sqrt{2}$ et $BC = 5$ et $ABC = \frac{\pi}{4}$.

On a :
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B$$
$$= \sqrt{2}^2 + 5^2 - 2\sqrt{2} \times 5 \cos\frac{\pi}{4}$$
$$= 19$$

Conclusion : $AC = 19$.

C. Théorème de la médiane :

a. Théorème :

Soit un segment $[AB]$ du plan (P) , le point I est son milieu .

Pour tout point M du plan (P) on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

b. Démonstration :

On a : $$MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$
$$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$$
$$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + 2\overrightarrow{IA}^2$$
$$= 2MI^2 + 2IA$$
$$= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

Conclusion : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$