

I. Coordonnées d'un point par rapport un repère – coordonnées d'un vecteur par rapport une base :

01. Base et repère de l'espace (\mathcal{E}) :

a. Activité :

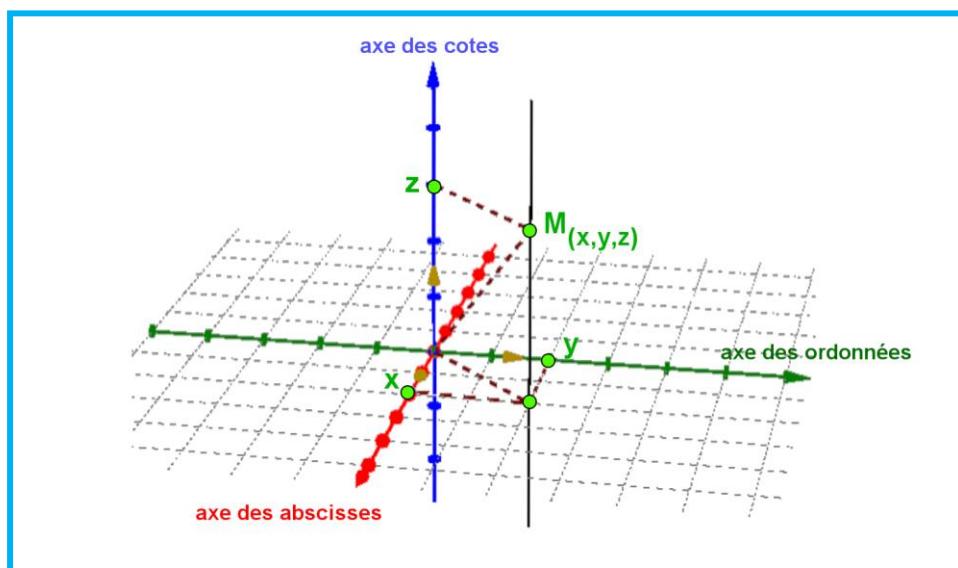
1. A partir d'un point O construire dans l'espace 3 vecteurs non coplanaires \vec{i} ; \vec{j} et \vec{k} .
2. Construire les droites : $D_1(O, \vec{i})$; $D_2(O, \vec{j})$ et $D_3(O, \vec{k})$

b. Vocabulaire :

- ⚡ Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'appelle base de l'espace .
- ⚡ On dit que l'espace (\mathcal{E}) est muni (ou rapporté) de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- ⚡ Le quadruplet s'appelle repère de l'espace .
- ⚡ On dit que l'espace (\mathcal{E}) est muni (ou rapporté au) du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

02. Coordonnées d'un point par rapport un repère – coordonnées d'un vecteur par rapport une base :

a. Activité :



Soit l'espace (\mathcal{E}) est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. M est un point de l'espace (\mathcal{E}) .

1. On construit les points M_1 et M_2 et M_3 et M' tel que :

⚡ M_3 est la projection de M sur la droite $D_3(O, \vec{k})$ parallèlement au plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$.

D'où : \vec{k} et $\overrightarrow{OM_3}$ sont colinéaires donc : $\exists ! z \in \mathbb{R} , \overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$ (1). (il existe un seul z de \mathbb{R} car la projection de M est unique)

⚡ M' est la projection de M sur le plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ parallèlement à la droite $D_3(O, \vec{k})$.

Le quadrilatère OM_3MM' est un parallélogramme d'où : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM_3}$ (2).

⚡ Soit le point M_1 est la projection de M' sur la droite $D_1(O, \vec{i})$ parallèlement à la droite $D_2(O, \vec{j})$

D'où : \vec{i} et $\overrightarrow{OM_1}$ sont colinéaires donc : $\exists !x \in \mathbb{R}, \overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ (3).

∴ Soit le point M_2 est la projection de M' sur la droite $D_2(O, \vec{j})$ parallèlement à la droite $D_1(O, \vec{i})$

D'où : \vec{j} et $\overrightarrow{OM_2}$ sont colinéaires donc : $\exists !y \in \mathbb{R}, \overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$ (4).

On a : le quadrilatère $OM_2M'M_1$ est un parallélogramme d'où : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (5).

∴ On déduit d'après (2) et (5) que : $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}) + \overrightarrow{OM_3}$ (6)

$$\overrightarrow{OM} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + z\vec{k} \quad (7) \text{ d'après (1) et (3) et (5)}$$

Conclusion : il existe un triplet unique (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tel que : $\overrightarrow{OM} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + z\vec{k}$ (7)

b. Vocabulaire :

- Le nombre réel x s'appelle l'abscisse du point M de l'espace (\mathcal{E}) par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Le nombre réel y s'appelle l'ordonnée du point M de l'espace (\mathcal{E}) par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Le nombre réel z s'appelle la cote du point M de l'espace (\mathcal{E}) par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

c. Définition :

- Tout point M de l'espace (\mathcal{E}) par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il existe un et un seul triplet (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- Le triplet (x, y, z) s'appelle les coordonnées du point M et de l'espace (\mathcal{E}) par rapport au repère

$$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}), \text{ on note : } M(x, y, z) \text{ ou } M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

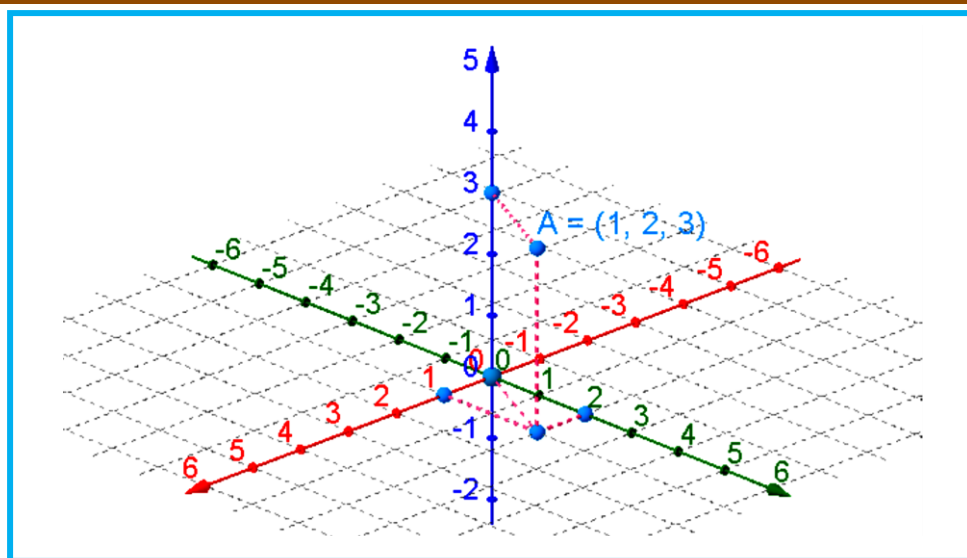
- Le triplet (x, y, z) s'appelle aussi les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OM} de l'espace (\mathcal{E}) par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (ou encore par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$), on note : $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ ou $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

d. Remarque :

- $M(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Exemple : $M(1, 2, -4) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$
- $\overrightarrow{OM}(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Exemple : $\overrightarrow{OM}(1, 2, -4) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

e. Exercice :

Construire le point $A(2, 1, 3)$ (ou encore $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$)



03. Coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\alpha\vec{u}$ et \overline{AB} :

a. Propriété :

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs et $A(a, b, c)$, $B(a', b', c')$ deux points de l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $I(a_1, b_1, c_1)$ le milieu du segment $[AB]$ et α de \mathbb{R} . on a :

1. $(\vec{u} + \vec{v})(x+x', y+y', z+z')$ et $\alpha\vec{u}(\alpha.x, \alpha.y, \alpha.z)$.
2. $\overline{AB}(a'-a, b'-b, c'-c)$.
3. $I\left(\frac{a'+a}{2}, \frac{b'+b}{2}, \frac{c'+c}{2}\right)$.

b. Preuve :

1. Montrons :

On a :
$$\vec{u} + \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$= x\vec{i} + x'\vec{i} + y\vec{j} + y'\vec{j} + z\vec{k} + z'\vec{k}$$

$$= (x+x')\vec{i} + (y+y')\vec{j} + (z+z')\vec{k}$$

Conclusion : les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ est $(x+x', y+y', z+z')$

On écrit : $(\vec{u} + \vec{v})(x+x', y+y', z+z')$.

Montrons :

On a :
$$\alpha\vec{u} = \alpha.(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \alpha(x\vec{i}) + \alpha(y\vec{j}) + \alpha(z\vec{k})$$

$$= (\alpha x)\vec{i} + (\alpha y)\vec{j} + (\alpha z)\vec{k}$$

Conclusion : les coordonnées de $\alpha\vec{u}$ est $(\alpha.x, \alpha.y, \alpha.z)$

On écrit : $\alpha \cdot \vec{u}(\alpha.x, \alpha.y, \alpha.z)$.

2. : les coordonnées de \vec{AB} , on a :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{AO} + \vec{OB} \\ &= \vec{OB} - \vec{OA} \\ &= (x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}) - (x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}) \\ &= (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k} \end{aligned}$$

Conclusion : $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Exemple 1 : A(1,2,3) et B(-2,4,5)

• Les coordonnées de est : $\vec{AB}(-2-1, 4-2, 5-3) = \vec{AB}(-3, 2, 2)$

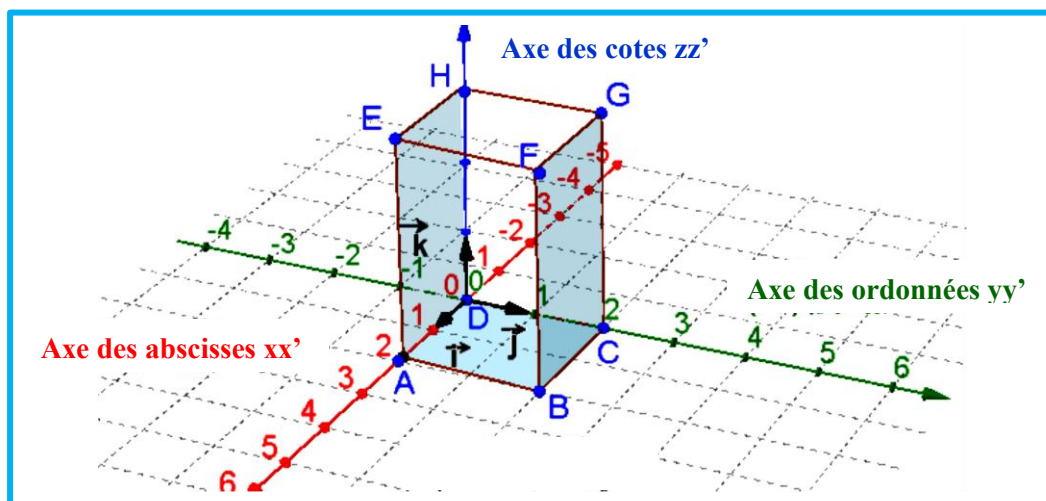
• Le milieu de [AB] est $I\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = I\left(\frac{-1}{2}, 3, 4\right)$.

• $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

On a : $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 2\vec{u}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = (\vec{u} + \vec{w})\begin{pmatrix} 2+1 \\ 3-2 \\ -5+7 \end{pmatrix} = (\vec{u} + \vec{w})\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 2 :

de l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère le parallélépipède droit ABCDEFGH (voir figure ci-contre).



1. On détermine les coordonnées les sommets de ABCDEFGH.

On a : A(2,0,0) et B(2,2,0) et C(0,2,0) et D(0,0,0) et E(2,2,2) et F(2,2,3) et G(0,2,3) et H(0,0,3)

II. Deux vecteurs colinéaires et trois vecteurs coplanaires :

01. Condition de la colinéarité de deux vecteurs :

a. Propriété : (rappel)

Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires équivaut à il existe α de \mathbb{R} tel que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha \vec{u}$.

b. Les déterminants extraites de \vec{u} et \vec{v} :

❖ **Définition et propriété :**

Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• Les déterminants suivants :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - zy' \text{ et } \Delta_y = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = xz' - zx' \text{ et } \Delta_z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

extraites de \vec{u} et \vec{v} .

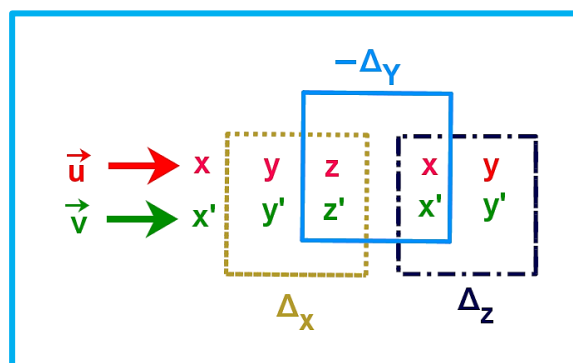
• \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires équivaut à $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ (les déterminants extraites de \vec{u} et \vec{v} sont tous nuls)

c. Application :

1. On étudie la colinéarité de $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a : $\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$ d'où : $\Delta_x \neq 0$.

Conclusion : \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.



02. Condition de coplanarité de trois vecteurs (\mathcal{E}) :

a. Déterminant de trois vecteurs de l'espace :

❖ **Définition et propriété :**

Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ et $\vec{w}(x'',y'',z'')$ trois vecteurs de l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le nombre :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$= (xy'z'' - xz'y'') + (-yx'z'' + yz'x'') + (zx'y'' - zy'x'')$$

Est appelé déterminant des vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} dans cet ordre.



b. Application :

1. On calcule $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec $\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(-2,0,1)$ et $\vec{w}(1,0,3)$.

$$\text{On a : } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times (-7) + 3 \times 0 = 14.$$

Conclusion : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 14$.

c. Méthode de calculer

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = (1) + (2) + (3) - (4) - (5) - (6)$$

Ou bien :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = (1) + (2) + (3) - (4) - (5) - (6)$$

d. Condition de coplanarité de trois vecteurs (\mathcal{E}) :

❖ **Propriété :**

$\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ et $\vec{w}(x'',y'',z'')$ trois vecteurs de l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

\vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

e. Application :

On considère l'application précédentes : $\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(-2,0,1)$ et $\vec{w}(1,0,3)$.

On a : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 14$.

Conclusion : les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires .

III. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace (\mathcal{E}) :

01. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace (\mathcal{E}) :



a. Activité :

On considère dans l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un vecteur non nul $\vec{u}(a, b, c)$ et un point donné $A(x_0, y_0, z_0)$ de (\mathcal{E}) et la droite $D(A, \vec{u})$

$M(x, y, z)$ est un point de (\mathcal{E}) .

On a : $M(x, y, z) \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow$ (les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Vocabulaire : l'écriture : $t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ s'appelle représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$.

b. Définition :

Le système : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ s'appelle représentation paramétrique de la droite $D \left(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$.

c. Remarque :

- Pour chaque valeur du paramètre t on obtient un point et un seul et la réciproque est vraie .
- Par exemple : pour la valeur $t = 0$ donne le point $A(x_0, y_0, z_0)$.
- représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$ n'est pas unique , on peut remplacer (x_0, y_0, z_0) par (x_1, y_1, z_1) coordonnées du point B à condition que $B \in D(A, \vec{u})$.

d. application :

• On donne une représentation paramétrique de la droite $D(A(0, 5, -4), \vec{u}(2, 1, -3))$.

une représentation paramétrique de (D) est : $D(A, \vec{u}) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 5 + t \\ z = -4 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

• On vérifie est ce-que le point $B(-2, 4, -1) \in D(A, \vec{u})$.

On a : $B(-2, 4, -1) \in D \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} -2 = 2t \\ 4 = 5 + t \\ -1 = -4 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} t = \frac{-2}{2} = -1 \\ t = 4 - 5 = -1 \\ 3t = -4 + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1 .$



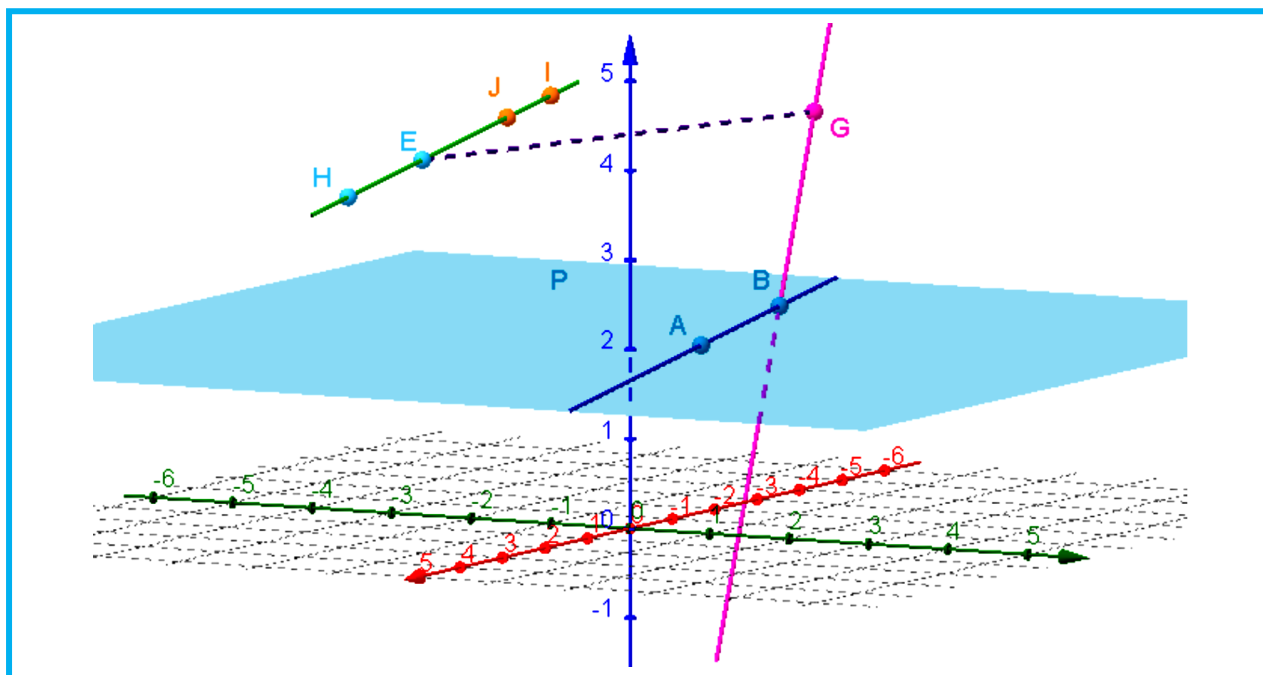
Conclusion : $B(-2, 4, -1) \in D$.

02. Les positions relatives de deux droites dans l'espace (\mathcal{E}) :

a. Activité :

On considère dans l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les droites (AB) et (EH) et (IJ) et (BG) .

1. On déduit les différentes positions relatives distinctes entre deux droites . voir figure ci-contre .



b. Vocabulaire :

- La droite (IJ) est confondue avec la droite (EH) on écrit $(IJ) = (EH)$.
on dit aussi (IJ) est parallèle à la droite (EH) on note : $(IJ) // (EH)$.
- Les droites (AB) et (EH) sont strictement parallèles on a $(AB) \cap (EH) = \emptyset$, on écrit $(AB) // (EH)$.
- La droite (BG) coupe la droite (AB) au point B , on a : $(AB) \cap (BG) = \{B\}$.
- Les droites (BG) et (EH) ne se coupent pas et elles ne sont pas parallèles , ses deux droites sont appelées droites non coplanaires .

c. Propriété :

$D(A, \vec{u})$ et $D'(B, \vec{v})$ sont deux droites de l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- $(D') = (D) \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaire et les deux droites ont un point commun})$. exemple $A \in (D')$
- (D) et (D') sont strictement parallèles $\Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaire et les deux droites n'ont pas un point commun})$.
- $(D') \cap (D) = \{I\} \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires et le point I est commun aux deux droites})$.
- (D) et (D') sont deux droites non coplanaires $\Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires et les deux droites n'ont pas des points communs})$.



d. Propriété :

- ∴ (D) et (D') sont deux droites non coplanaires \Leftrightarrow (\vec{u} et \vec{v} et \overline{AB} ne sont pas coplanaires .
- ∴ $D(A, \vec{u})$ et $D'(B, \vec{v})$ sont deux droites non coplanaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB}) \neq 0$.

e. Application :

On considère la droite $D(A(0,5,-4), \vec{u}(0,1,2))$ et la droite (D') dont une représentation

$$\text{paramétrique est : } D' : t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 - 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases} .$$

On a :

- la droite (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}(0,1,2)$.
- la droite (D') a pour vecteur directeur $\vec{v}(0,-2,-4)$.
- on remarque : $\vec{v} = -2\vec{u}$ (on peut calculer les déterminants extraites $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$) donc \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et on a le point $A(0,5,-4)$ de la droite (D) ne vérifie pas la représentation paramétrique car les points de la droite (D') ont pour abscisses toujours $x = -1$) .

IV. Représentation paramétrique d'un plan – équation cartésienne d'un plan de l'espace (E) :

01. Représentation paramétrique d'un plan :

a. Activité :

- $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ deux vecteurs non colinéaire de l'espace (E) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point donné de l'espace (E) .
- On considère le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ (passe par le point A a pour vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v}) .

1. $M(x,y,z)$ est un point du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ alors :

$$M(x,y,z) \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \overline{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} ; \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} ; \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a' \\ \beta b' \\ \beta c' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} ; \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x - x_A = \alpha a + \beta a' \\ y - y_A = \alpha b + \beta b' \\ z - z_A = \alpha c + \beta c' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta a' \\ y = y_A + \alpha b + \beta b' \\ z = z_A + \alpha c + \beta c' \end{cases}$$

L'écriture $\alpha, \beta \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta a' \\ y = y_A + \alpha b + \beta b' \\ z = z_A + \alpha c + \beta c' \end{cases}$ est appelée **représentation paramétrique d'un plan** $P(A, \vec{u}, \vec{v})$

b. Définition :

Le système : $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s'appelle **représentation paramétrique du plan**

$$P \left(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right) \text{ de l'espace } (\mathcal{E}).$$

c. Remarque :

- Pour chaque valeur du paramètre α et du paramètre β on obtient un point et un seul et la réciproque est vraie .
- Par exemple : pour la valeur $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ donne le point $A(x_0, y_0, z_0)$.
- représentation paramétrique du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ n'est pas unique on peut remplacer (x_0, y_0, z_0) par (x_1, y_1, z_1) coordonnées du point B à condition que $B \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

d. application :

• On donne une représentation paramétrique du plan $P \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$.

une représentation paramétrique de (P) est : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) \begin{cases} x = 1 + 3\alpha + 2\beta \\ y = -2 + 5\alpha - 4\beta \\ z = 7 + 9\beta \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

• On vérifie est ce-que le point $B(5, 12, -2) \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

On a :



$$\begin{aligned}
 B(5,12,-2) \in D &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} 5 = 1 + 3\alpha + 2\beta \\ 12 = -2 + 5\alpha - 4\beta \\ -2 = 7 + 9\beta \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} 5 = 1 + 3\alpha + 2\beta \\ 12 = -2 + 5\alpha - 4\beta \\ -9 = 9\beta \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} 5 = 1 + 3\alpha - 2 \\ 12 = -2 + 5\alpha + 4 \\ \beta = -1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion : $B(5,12,-2) \in (P)$.

02. équation cartésienne d'un plan de l'espace (\mathcal{E}) :

a. activité :

On considère dans l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le plan $P \left(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix} \right)$

$M(x, y, z)$ est un point de (\mathcal{E}) .

$M(x, y, z) \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} et \overline{AM} sont colinéaires .

$$\Leftrightarrow \det(\overline{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & a' & a'' \\ y - y_0 & b' & b'' \\ z - z_0 & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0) \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\Delta_x - y\Delta_y + z\Delta_z + (-x_0\Delta_x + y_0\Delta_y - z_0\Delta_z) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + b\Delta_y + c\Delta_z + d = 0 \quad (1)$$

Avec :

$$a = \Delta_x = b'c'' - c'b'', \quad b = \Delta_y = a'c'' - c'a'', \quad c = \Delta_z = a'b'' - b'a'' \quad \text{et} \quad d = -x_0\Delta_x + y_0\Delta_y - z_0\Delta_z$$

b. vocabulaire :

l'équation obtenue (1) : $ax + b\Delta_y + c\Delta_z + d = 0$ est appelée équation cartésienne du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

c. définition et propriété :

Soit $P \left(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix} \right)$ est un plan de l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- le plan (P) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace (\mathcal{E}) qui vérifie l'équation : $(x-x_0)\Delta_x - (y-y_0)\Delta_y + (z-z_0)\Delta_z = 0$ avec $a = \Delta_x$ et $b = \Delta_y$ et $c = \Delta_z$ sont les déterminants extraites de \vec{u} et \vec{v} .
- L'équation : $(x-x_0)\Delta_x - (y-y_0)\Delta_y + (z-z_0)\Delta_z = 0$ s'appelle **équation cartésienne du plan** $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.
- En générale l'équation s'écrit : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) : ax + by + cz + d = 0$ avec $a = \Delta_x$ et $b = \Delta_y$ et $c = \Delta_z$ et $d = -x_0\Delta_x + y_0\Delta_y - z_0\Delta_z$ sont des réels et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (au moins un nombre est non nul).

d. Application :

On donne équation cartésienne du plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$

1^{ère} méthode :

2^{ème} méthode :

$$M(x, y, z) \in P(O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{i}, \vec{j}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \times 0 - y \times 0 + z \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0$$

(P) a pour équation de la forme: $P : ax + by + cz + d = 0$

$$\text{on a : } a = \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, b = \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, c = \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$d'ou : P : 0x + 0y + 1z + d = 0$$

$$\text{on a : } O(0, 0, 0) \in (P) \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 + d = 0 \text{ donc } d = 0$$

$$\text{par suite : } (P) : z = 0$$

Conclusion : équation cartésienne du plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $z = 0$

e. Remarque :

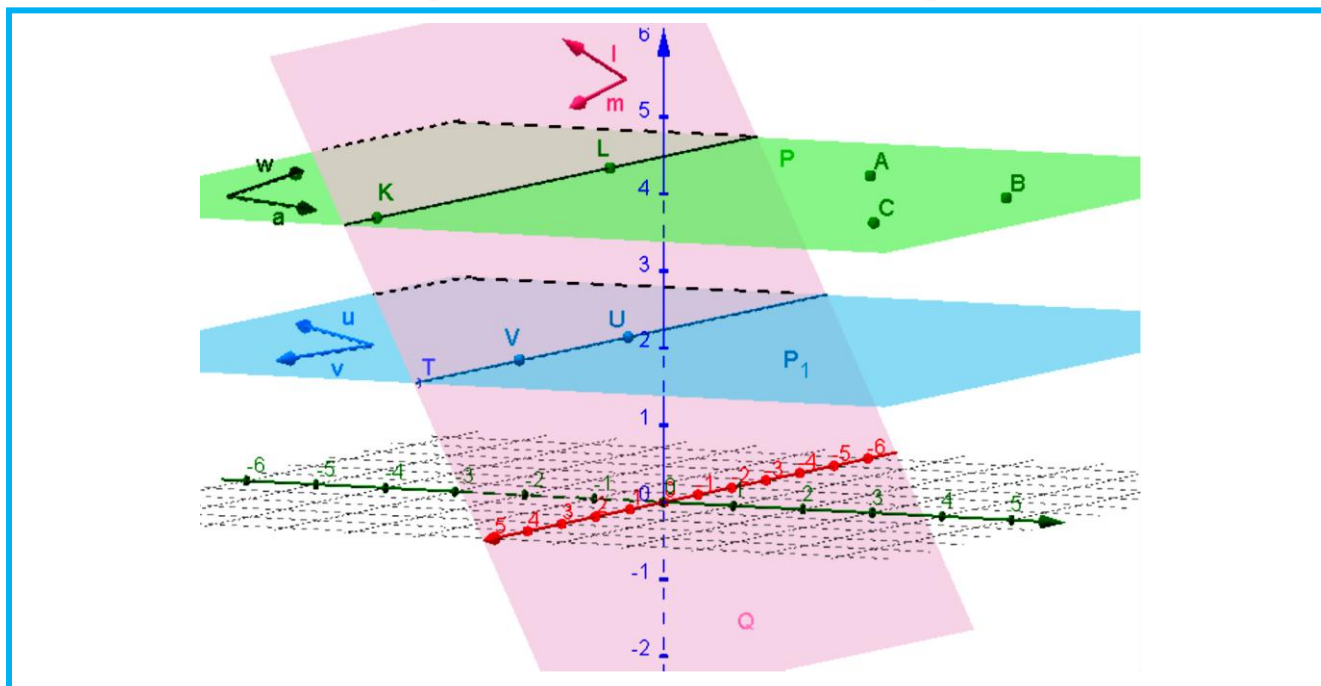
- l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace (\mathcal{E}) tel que $z = 0$ est le plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace (\mathcal{E}) tel que $y = 0$ est le plan $P(O, \vec{i}, \vec{k})$.
- l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace (\mathcal{E}) tel que $x = 0$ est le plan $P(O, \vec{j}, \vec{k})$.

03. Positions relatives de deux plans :

a. Activité :

On considère dans l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les droites (P) et (P₁) et (Q) et (ABC).

2. On déduit les différentes positions relatives distinctes entre deux plans . voir figure ci-contre .



b. Vocabulaire :

- Le plan (P) est confondu avec le plan (ABC) on écrit $(P)=(ABC)$
on dit aussi (P) est parallèle au plan (ABC) on note : $(P)\parallel(ABC)$.
- Les plans (P) et (P₁) sont strictement parallèles on a $(P)\cap(P_1)=\emptyset$, on écrit $(P)\parallel(P_1)$.
- Les plans (P) et (Q) se coupent suivant la droite (KL) , on écrit $(P)\cap(Q)=(KL)$

c. Propriété :

(P) : $ax+by+cz+d=0$ et (P') : $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont deux plans de l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.(sans oublier que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $(a',b',c') \neq (0,0,0)$)

Les 2 plans sont confondus : $(P)=(P') \Leftrightarrow (a' = ka \text{ et } b' = kb \text{ et } d' = kd \text{ et } k \neq 0)$

ou encore : Les 2 plans sont confondus : $(P)=(P') \Leftrightarrow (\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'})$ (à conditions les nombres sont tous non nuls)

Les 2 plans sont strictement parallèles : $(P') \cap (P) = \emptyset \Leftrightarrow (a' = ka \text{ et } b' = kb \text{ et } d' \neq kd)$

ou encore : Les 2 plans sont strictement parallèles: $(P') \cap (P) = \emptyset \Leftrightarrow (\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \text{ et } d \neq kd')$

Les 2 plans sont sécants suivant une droite : $(P') \cap (P) = (D) \Leftrightarrow (\vec{u}(a,b,c) \text{ et } \vec{v}(a',b',c') \text{ ne sont pas colinéaires})$.

ou encore : Les 2 plans sont sécants suivant une droite : $(P') \cap (P) = (D) \Leftrightarrow (\text{au moins deux rapports}$

suivants $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$ et $\frac{c}{c'}$ ne sont pas égaux .



d. Remarque :

- $(P(A, \vec{u}, \vec{v}) \text{ et } P(B, \vec{u}', \vec{v}'))$ sont deux plans sécants \Leftrightarrow (\vec{u} et \vec{v} et \vec{u}' sont coplanaires et aussi les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{v}').
- $(P(A, \vec{u}, \vec{v}) \text{ et } P(B, \vec{u}', \vec{v}'))$ sont deux plans sécants $\Leftrightarrow (\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}') = 0 \text{ et } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}') = 0)$.

e. Propriété :

- $(D) \text{ et } (D')$ sont deux droites non coplanaires \Leftrightarrow (\vec{u} et \vec{v} et \vec{AB} ne sont pas coplanaires .
- $(D) \text{ et } (D')$ sont deux droites non coplanaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) \neq 0$.

f. Application :

On considère les plans $(P) : 2x - 6z + 5 = 0$ et $(P') : -x + 3z + 1 = 0$.

On a : $\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = -2$ et $\frac{5}{1} \neq -2$ donc les deux plans sont **strictement parallèles**

Conclusion : $(P') \cap (P) = \emptyset$.

V. Système de deux équations cartésiennes d'une droite de l'espace (\mathcal{E}) :

01. Système de deux équations cartésiennes d'une droite :

a. Activité :

Dans l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a : $t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ est une représentation

paramétrique de la droite $D(A(x_0, y_0, z_0), \vec{u}(a, b, c))$.

- **1^{er} cas :** on suppose que les nombres a et b et c sont non nuls :

On a :

$$\left. \begin{matrix} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = t \\ \frac{y - y_0}{b} = t \\ \frac{z - z_0}{c} = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

L'écriture : $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite $D(A, \vec{u})$

• (remarque $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ sont des équations de 2 plans $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ et $\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$)

- **2^{ème} cas** : on suppose qu'un nombre seul parmi les nombres a et b et c est nul : (on suppose $a = 0$)

$$\text{On a : } \left. \begin{array}{l} x = x_0 + 0 \times t \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{b} = t \\ \frac{z - z_0}{c} = t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x - x_0 = 0 \text{ et } \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

L'écriture : $x - x_0 = 0$ et $\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite

$D(A, \vec{u})$. (remarque $x - x_0 = 0$ et $\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ sont des équations de 2 plans)

- **3^{ème} cas** : on suppose que juste deux nombres parmi les nombres a et b et c est nul : (on suppose $a = 0$ et $c = 0$)

$$\text{On a : } \left. \begin{array}{l} x = x_0 + 0 \times t \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + 0 \times t \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{b} = t \\ z - z_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x - x_0 = 0 \text{ et } z - z_0 = 0$$

L'écriture : $x - x_0 = 0$ et $z - z_0 = 0$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite

$D(A, \vec{u})$. (remarque $x - x_0 = 0$ et $z - z_0 = 0$ sont des équations de 2 plans)

Remarque : on ne peut pas avoir les 3 nombres a et b et c sont tous nuls car $\vec{u}(a, b, c) \neq \vec{0}$ c'est un vecteur directeur de la droite $D(A, \vec{u}(a, b, c))$ donc : $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

b. Propriété et définition :

Dans l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère la droite $D(A(x_0, y_0, z_0), \vec{u}(a, b, c))$.

Un point $M(x, y, z)$ de l'espace (\mathcal{E}) appartient à la droite $D(A, \vec{u})$ si et seulement si on a :

- **1^{er} cas** : on suppose que les nombres a et b et c sont non nuls :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \text{ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite } D(A, \vec{u}) .$$

- ***2^{ème} cas** : on suppose qu'un nombre seul parmi les nombres a et b et c est nul : (on suppose $a = 0$)

$$x - x_0 = 0 \text{ et } \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \text{ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite } D(A, \vec{u})$$

- **3^{ème} cas** : on suppose que juste deux nombres parmi les nombres a et b et c est nul : (on suppose $a = 0$ et $c = 0$) .

$$x - x_0 = 0 \text{ et } z - z_0 = 0 \text{ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite } D(A, \vec{u}) .$$

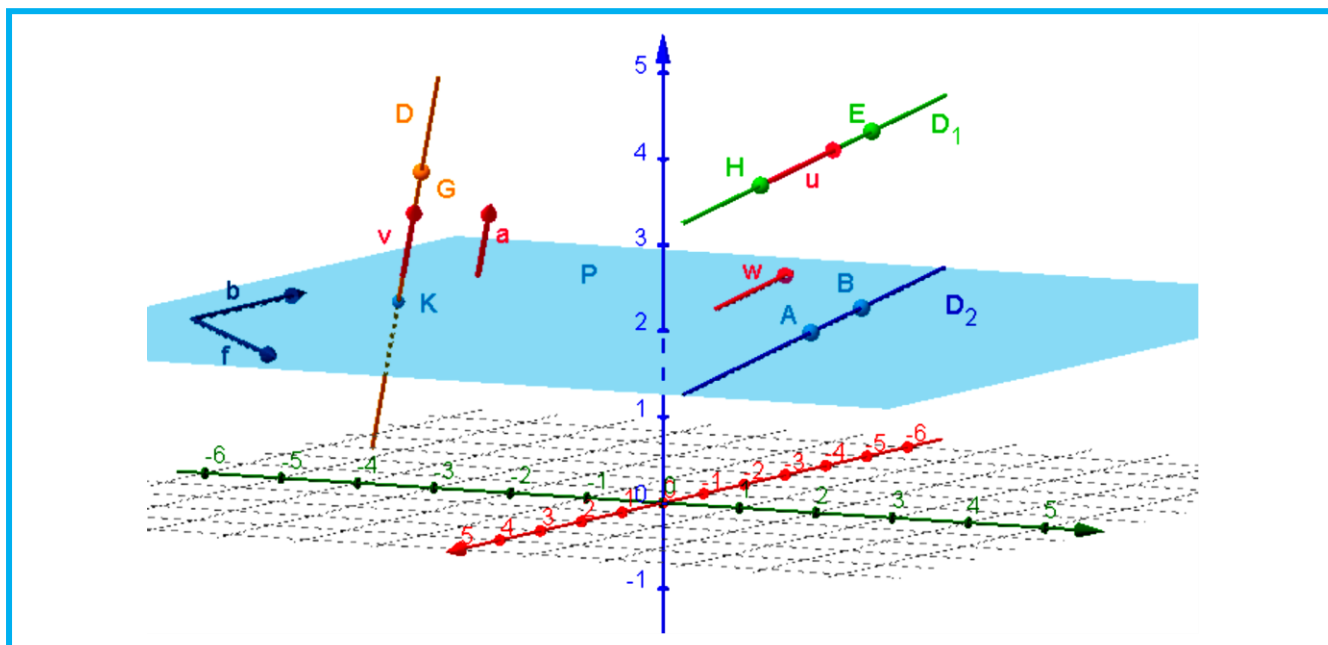


02. Positions relatives d'une droite et un plan de l'espace (\mathcal{E}) :

a. Activité :

On considère dans l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une droite (D) et un plan (P)

3. On déduit les différentes positions relatives distinctes entre le plan et la droite .voir figure ci-contre .



b. Vocabulaire :

- La droite (D) est incluse dans le plan (P) , on écrit $(D) \subset (P)$ on a : $(D) \cap (P) = (D)$
on dit aussi (D) est parallèle au plan (P) on note : $(D) \parallel (P)$.
- Le droite (D) est strictement parallèle à (P) on a $(D) \cap (P) = \emptyset$, on écrit $(P) \parallel (P_1)$.
- Le plan (P) et la droite(D) se coupent au point K la droite (KL) , on écrit $(D) \cap (P) = \{K\}$.
on dit aussi la droite (D) et le plan (P) sont sécants en K .

c. Propriété :

Soient $D(B, \vec{w})$ une droite et $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan de l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- (La droite (D) est incluse dans le plan (P)) \Leftrightarrow (les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires et $B \in (P)$) .
 \Leftrightarrow $(\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \text{ et } B \in (P))$.
- (Le droite (D) est strictement parallèle à (P)) \Leftrightarrow (les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires et $B \notin (P)$) .
 \Leftrightarrow $(\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \text{ et } B \notin (P))$.
- la droite (D) coupe le plan (P) au point A) \Leftrightarrow (les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires) .
 \Leftrightarrow $(\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0)$.