Correction de l'examen national du baccalauréat

2 Bac SM F -2023- session normal

www.svt-assilah.com

Exercice 1 : Chimie

Partie 1 :

1-L'équation de la réaction du dosage :

$$C_2H_5COOH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \longrightarrow C_2H_5COO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$$

2-Explication :

L'ajout de volume V_e de l'eau a pour but de diluer la solution (S_A) donc la quantité de matière de l'acide propanoïque reste constante à l'équivalence : $n_i(\text{acide}) = n_{aj}(HO^-) = C_B.V_{BE}$.

Donc il n'y a pas d'influence sur le volume V_{BE} versé à l'équivalence.

3-l'expression τ en fonction de pH, K_e, C_B, V_A, V_t et V_B :

Tableau d'avancement :

Equation de la réaction	$C_2H_5COOH_{(aq)}$	$+ HO^-_{(aq)}$	$\longrightarrow$	$C_2H_5COO^-_{(aq)}$	$+ H_2O_{(l)}$
Etat initial	$C_A(V_A+V_e)$	$C_B.V_{B1}$		0	En excès
Etat intermédiaire	$C_A(V_A+V_e)-x$	$C_B.V_{B1}-x$		x	En excès
Etat final	$C_A(V_A+V_e)-x_f$	$C_B.V_{B1}-x_f$		x_f	En excès

Expression du taux d'avancement : $\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$

Avant l'équivalence, le réactif limitant est HO^- car $C_B.V_{B1} < C_A(V_A+V_e)$

$$C_B.V_{B1} - x_{max} = 0 \implies x_{max} = C_B.V_{B1}$$

$$[HO^-].[H_3O^+] = K_e \implies [HO^-] = \frac{K_e}{[H_3O^+]} = \frac{K_e}{10^{-pH}} = K_e.10^{pH}$$

D'après le tableau d'avancement :

$$[HO^-] = \frac{C_B.V_{B1} - x_f}{V_A+V_e+V_{B1}} \implies C_B.V_{B1} - x_f = [HO^-].(V_A+V_e+V_{B1}) \implies x_f = C_B.V_{B1} - K_e.10^{pH}.(V_A+V_e+V_{B1})$$

$$\tau = \frac{C_B.V_{B1} - K_e.10^{pH}.(V_A+V_e+V_{B1})}{C_B.V_{B1}} = 1 - \frac{K_e.10^{pH}.(V_A+V_e+V_{B1})}{C_B.V_{B1}}$$

$$\tau = 1 - \frac{K_e.10^{pH}}{C_B}.\left(\frac{V_A+V_e+V_B}{V_{B1}}\right) \implies \tau = 1 - \frac{K_e.10^{pH}}{C_B}.\left(1+\frac{V_A+V_e}{V_{B1}}\right)$$

A.N : $$\tau = 1 - \frac{10^{-14}\times 10^{4,8}}{2.10^{-2}} \times \left(1+\frac{10+50}{3,9}\right) = 0,99999 \approx 1$$

$\tau \simeq 1$, donc la réaction est totale.

4-Calcul des concentrations $[C_2H_5COOH]$ et $[C_2H_5COO^-]$:

A l'équivalence, on a :

$$C_A.(V_A+V_e) = C_B.V_{BE} \implies C_A = \frac{C_B.V_{BE}}{V_A+V_e} \implies C_A = \frac{2.10^{-3}\times 7,8.10^{-3}}{(10+50).10^{-3}} = 2,6.10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

$$[C_2H_5COOH] = \frac{C_A(V_A+V_e)-x_f}{V_A+V_e+V_{B1}} = \frac{C_A(V_A+V_e)-x_{max}}{V_A+V_e+V_{B1}} = \frac{C_A(V_A+V_e)-C_B.V_{B1}}{V_A+V_e+V_{B1}}$$

$$[C_2H_5COOH] = \frac{2{,}6.10^{-3} \times (10+50).10^{-3} - 2.10^{-3} \times 3{,}9.10^{-3}}{(10+50+3{,}9).10^{-3}} \Longrightarrow [C_2H_5COOH] = 1{,}22.10^{-3} mol.L^{-1}$$

$$[C_2H_5COO^-] = \frac{x_f}{V_A + V_e + V_{B1}} = \frac{x_{max}}{V_A + V_e + V_{B1}} = \frac{C_B.V_{B1}}{V_A + V_e + V_{B1}}$$

$$[C_2H_5COO^-] = \frac{2.10^{-3} \times 3{,}9.10^{-3}}{(10+50+3{,}9).10^{-3}} \Longrightarrow [C_2H_5COO^-] = 1{,}22.10^{-2} mol.L^{-1}$$

Déduction de la valeur du pK_A :

$pH_1 = pK_A + \log\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}$ on a : $[C_2H_5COO^-] = [C_2H_5COOH] = 1{,}22.10^{-2} mol.L^{-1} \Rightarrow pH_1 = pK_A = 4{,}86$

$$pK_A(C_2H_5COOH/C_2H_5COO^-) = pH_1 = 4{,}86$$

5-Justification de la nature basique du milieu à l'équivalence :

A l'équivalence il y a disparition totale des deux réactifs C_2H_5COOH et HO^-, le mélange réactionnel contient $C_2H_5COO^-$ et Na^+ et l'eau. Le milieu est basique $pH > 7$.

6-Calcul du pH :

Calcul de C concentration de l'acide propanoïque dans la solution (S), d'après la relation de dilution : $C.V_A = C_A.(V_A + V_e) \Longrightarrow C = \frac{C_A.(V_A+V_e)}{V_A} = C_A.\left(1 + \frac{V_e}{V_A}\right)$

$$C = 2{,}6.10^{-3} \times \left(1 + \frac{50}{10}\right) \Longrightarrow C = 1{,}56.10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

Tableau d'avancement de la réaction de l'acide propnoïque est l'eau :

Equation de la réaction	$C_2H_5COOH_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$	$\longrightarrow$	$C_2H_5COO^-_{(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$
Etat initial	$C.V_A$	En excès	--	0	0
Etat intermédiaire	$C.V_A - x$	En excès	--	x	x
Etat d'équilibre	$C.V_A - x_{éq}$	En excès	--	$x_{éq}$	$x_{éq}$

$$[C_2H_5COO^-]_{éq} = [H_3O^+]_{éq} = \frac{x_{éq}}{V_A} \quad \text{et} \quad [C_2H_5COO^-]_{éq} = \frac{C.V_A - x_{éq}}{V_A} = C - \frac{x_{éq}}{V_A} = C - [H_3O^+]_{éq}$$

$$Q_{r,éq} = K_A = \frac{[C_2H_5COO^-]_{éq}.[H_3O^+]_{éq}}{[C_2H_5COO]_{éq}} = \frac{[H_3O^+]_{éq}{}^2}{C - [H_3O^+]_{éq}}$$

$$K_A.(C - [H_3O^+]_{éq}) = [H_3O^+]_{éq}{}^2 \Longrightarrow [H_3O^+]_{éq}{}^2 + K_A.[H_3O^+]_{éq} - C.K_A = 0$$

$$\Delta = K_A^2 + 4K_A.C$$

$$[H_3O^+]_{éq} = \frac{-K_A + \sqrt{K_A^2 + 4K_A.C}}{2} \Longrightarrow [H_3O^+]_{éq} = \frac{-10^{-pK_A} + \sqrt{10^{-2pK_A} + 4.10^{-pK_A}.C}}{2}$$

$$[H_3O^+]_{éq} = \frac{-10^{-4{,}86} + \sqrt{10^{-2\times 4{,}86} + 4.10^{-4{,}86} \times 1{,}56.10^{-2}}}{2} = 3{,}57.10^{-4}\ mol.L^{-1}$$

$$pH = -\log[H_3O^+]_{éq} = 3{,}339 \Longrightarrow pH = 3{,}34$$

7-Vérification de la masse de l'acide propanïque :

$$C = \frac{n}{V} = \frac{m}{M(C_2H_5COOH).V} \Longrightarrow m = C.M(C_2H_5COOH).V$$

$$m = 1{,}56.10^{-2} \times 74 \times 40.10^{-3} = 46{,}176.10^{-3}\ g \Longrightarrow m \simeq 46{,}2\ mg$$

La masse de l'acide propanoïque est celle indiquée sur l'étiquette.

Partie 2 :

1-Le sens d'évolution du système chimique :

D'après la courbe $[Sn^{2+}] = f(t)$ on constate qu'au cours du fonctionnement de la pile $[Sn^{2+}]$augmente donc Sn^{2+} est un produit.

Donc le système chimique évolue spontanément dans le sens (2) sens de formation des ions Sn^{2+}.

$$Sn_{(s)} + Pb^{2+}{}_{(aq)} \longrightarrow Sn^{2+}{}_{(aq)} + Pb_{\,(s)}$$

2-L'équation de la réaction qui se produit au niveau de l'anode :

$$Sn_{(s)} \rightleftarrows Sn^{2+}{}_{(aq)} + 2e^-$$

3-Le schéma conventionnel de la pile :

$$(-)\ Sn_{(s)}/Sn^{2+}{}_{(aq)}//\ Pb^{2+}{}_{(aq)}/Pb_{\,(s)}\ (+)$$

4-Le sens de migration des ions $C\ell^-$:

Dans le compartiment anodique, il y a oxydation de Sn à Sn^{2+} lors de fonctionnement de la pile, l'augmentation de nombre des ions Sn^{2+} produit la migration des ions chlorure $C\ell^-$ du pont salin vers le compartiment anodique pour assurer la neutralité électrique.

5-1-L'expression de $[Sn^{2+}]$ en fonction de C_2 , V_2 , F , I et t :

Tableau d'avancement :

Equation de la réaction	$Sn_{(s)}$	$+\ Pb^{2+}{}_{(aq)}$	$\longrightarrow$	$Sn^{2+}{}_{(aq)}$	$+\ Pb_{\,(s)}$
Etat initial	$n_i(Sn)$	$C_1.V_1$	--	$C_2.V_2$	$n_i(Pb)$
Etat intermédiaire	$n_i(Sn) - x$	$C_1.V_1 - x$	--	$C_2.V_2 + x$	$n_i(Pb) + x$
Etat d'équilibre	$n_i(Sn) - x_{éq}$	$C_1.V_1 - x_{éq}$	--	$C_2.V_2 + x_{éq}$	$n_i(Pb) + x_{éq}$

Pendant la durée t on a : $[Sn^{2+}]_t = \frac{C_2.V_2+x}{V_2} = C_2 + \frac{x}{V_2}$

$$Q = I.\Delta t = n(e^-).F \implies \text{On a : } n(e^-) = 2x \quad \text{et} \quad \Delta t = t - \underbrace{t_0}_{=0} = t$$

$$2x.F = I.t \implies x = \frac{I.t}{2F}$$

$$[Sn^{2+}]_t = \frac{C_2.V_2 + x}{V_2} = C_2 + \frac{I.t}{2F.V_2}$$

5-2-Montrons la relation $K = \frac{2FC_2V_2 - I\Delta t}{2FC_2V_2 + I\Delta t}$:

L'expression de la constante d'équilibre est : $K' = \frac{[Sn^{2+}]_{éq}}{[Pb^{2+}]_{éq}}$ avec $K' = \frac{1}{K} \implies K = \frac{1}{K'}$

$$K = \frac{[Pb^{2+}]_{éq}}{[Sn^{2+}]_{éq}} = \frac{\frac{C_1.V_1 - x}{V_1}}{\frac{C_2.V_2 + x}{V_2}} \xRightarrow{\text{avec } V_1 = V_2 \text{ et } C_1 = C_2} K = \frac{C_2.V_2 - x}{C_2.V_2 + x} = \frac{C_2.V_2 - \frac{I.\Delta t}{2F}}{C_2.V_2 + \frac{I.\Delta t}{2F}} = \frac{2F.C_2.V_2 - I.\Delta t}{2F.C_2.V_2 + I.\Delta t}$$

Graphiquement : $C_2 = 20.10^{-3} mol.L^{-3}$ et $\Delta t = 2{,}5.10^3\ s$

$$K = \frac{2 \times 9{,}65.10^4 \times 2.10^{-2} \times 30.10^{-3} - 17{,}13.10^{-3} \times 2{,}5.10^3}{2 \times 9{,}65.10^4 \times 2.10^{-2} \times 30.10^{-3} + 17{,}13.10^{-3} \times 2{,}5.10^3} \implies K = 0{,}46$$

Exercice 2 :

1-Le retard temporel $\tau_{M/S}$:

$$\tau_{M/S} = t_M - t_O = 7{,}5 - 0 \Longrightarrow \tau_{M/S} = 7{,}5\ s$$

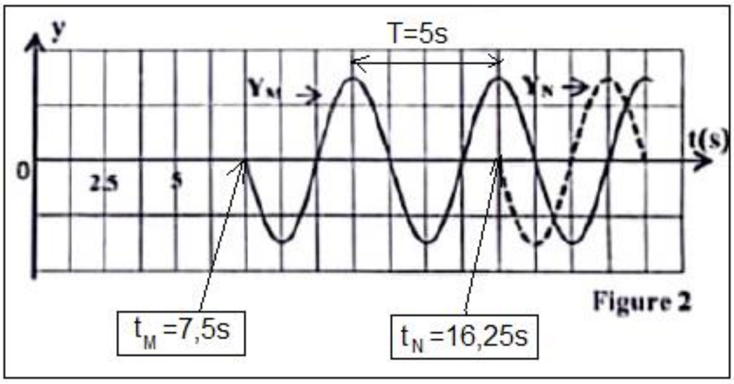
-Déduction de H_1:

$$V_1 = \frac{L_1}{\tau_{M/S}} \text{ avec } V_1 = \sqrt{g.H_1}$$

$$\sqrt{g.H_1} = \frac{L_1}{\tau_{M/S}} \Longrightarrow g.H_1 = \left(\frac{L_1}{\tau_{M/S}}\right)^2$$

$$H_1 = \frac{1}{g}.\left(\frac{L_1}{\tau_{M/S}}\right)^2$$

$$H_1 = \frac{1}{10} \times \left(\frac{30}{7{,}5}\right)^2 \Longrightarrow H_1 = 1{,}6\ m$$



2-Calcul de H_2 :

Le retard de phase de N par rapport à M est : $\tau_{N/M} = t_N - t_M = 16{,}25 - 7{,}5 = 8{,}75\ s$

$$V_2 = \frac{L_2}{\tau_{N/M}} = \frac{L - L_1}{\tau_{N/M}} \text{ avec } V_2 = \sqrt{g.H_2}$$

$$\sqrt{g.H_2} = \frac{L - L_1}{\tau_{N/M}} \Longrightarrow g.H_2 = \left(\frac{L - L_1}{\tau_{N/M}}\right)^2 \Longrightarrow H_2 = \frac{1}{g}.\left(\frac{L - L_1}{\tau_{N/M}}\right)^2$$

$$H_2 = \frac{1}{10} \times \left(\frac{47{,}5 - 30}{8{,}75}\right)^2 = 0{,}4\ m \Longrightarrow H_2 = 40\ cm$$

3-Calcul de λ_1 et λ_2 :

$$V_1 = \sqrt{g.H_1} = \frac{\lambda_1}{T} \Longrightarrow \lambda_1 = T.\sqrt{g.H_1}$$

D'après la figure 2, on a : $T = 5\ s$ AN :

$$\lambda_1 = 5 \times \sqrt{10 \times 1{,}6} \Longrightarrow \lambda_1 = 20\ m$$

$$V_2 = \sqrt{g.H_2} = \frac{\lambda_2}{T} \Longrightarrow \lambda_2 = T.\sqrt{g.H_2}$$

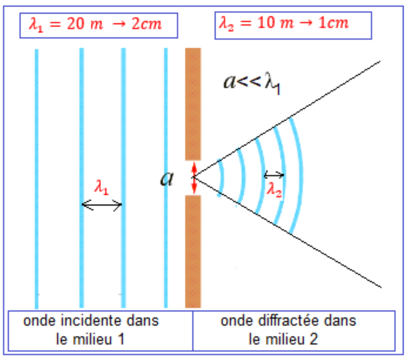
AN :

$$\lambda_2 = 5 \times \sqrt{10 \times 0{,}4} \Longrightarrow \lambda_2 = 10\ m$$

4-1-Nom du phénomène avec justification :

Phénomène de diffraction car la condition d'obtenir la diffraction d'une onde mécanique est vérifier : ($a \ll \lambda_1$) .

4-2-Représentation des crêtes :



Exercice 3 :

Partie 1 :

1-Charde d'un condensateur réel

1-1-Vérification de l'expression de i :

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$

Loi d'ohm : $u_{Rd} = R_d . i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{u_{Rd}}{R_d} \xRightarrow{u_{Rd}=u_C} i_1 = \frac{u_C}{R_d}$ et $i_2 = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$

$$i = \frac{u_C}{R_d} + C\frac{du_C}{dt}$$

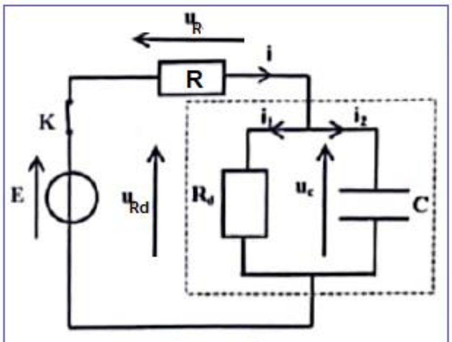


Figure 2

1-2-L'équation différentielle :

Loi d'additivité des tensions : $E = u_R + u_C$

$$u_R = R.i = R\left(\frac{u_C}{R_d} + C\frac{du_C}{dt}\right)$$

$$E = R\left(\frac{u_C}{R_d} + C.\frac{du_C}{dt}\right) + u_C = \frac{R.u_C}{R_d} + R.C\frac{du_C}{dt} + u_C$$

$$= u_C\left(\frac{R}{R_d} + 1\right) + R.C\frac{du_C}{dt}$$

$$E = u_C\left(\frac{R+R_d}{R_d}\right) + R.C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{E}{R.C} = \frac{du_C}{dt} + \frac{(R+R_d)}{R.R_d.C}.u_C$$

On pose : $A = \frac{E}{R.C}$ et $\frac{1}{\tau} = \frac{(R+R_d)}{R.R_d.C} \Rightarrow \tau = \frac{R.R_d.C}{R+R_d}$

L'équation différentielle s'écrit : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}.u_C = A$

1-3-L'expression de $u_{C\,(max)}$ en fonction de R_d R et E:

En régime permanent $u_C = u_{C\,max} = Cte$ donc $\frac{du_C}{dt} = \frac{du_{Cmax}}{dt} = 0$

L'équation différentielle s'écrit : $\frac{E}{R.C} = \underbrace{\frac{du_{C\,max}}{dt}}_{=0} + \frac{(R+R_d)}{R.R_d.C}.u_{C\,max} \Rightarrow \frac{E}{R.C} = \frac{(R+R_d)}{R.R_d.C}.u_{C\,max}$

$$E = \frac{(R+R_d)}{R_d}.u_{C\,max} \Rightarrow u_{C\,max} = \frac{E.R_d}{R_d+R}$$

Comparaison de $u_{C\,(max)}$ à E :

$$R_d + R > R_d \Rightarrow \frac{R_d}{R_d+R} < 1 \Rightarrow \frac{E.R_d}{R_d+R} < E \Rightarrow u_{C\,max} < E$$

1-4-La valeur de E et de R :

On a : $R_d \gg R \Rightarrow R_d + R = R$

$$u_{C\,max} = \frac{E.R_d}{R_d} \Rightarrow u_{C\,max} = E$$

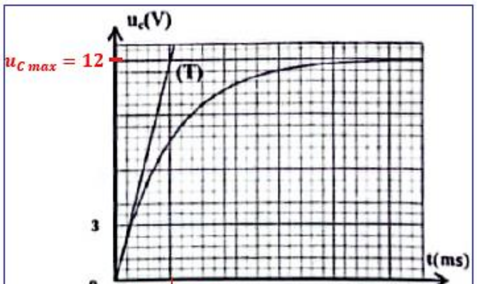


Figure 3

On utilisant le graphe de la figure 3 On trouve :

$$u_{C\,max} = E = 12\text{ V et } \tau = 2{,}5\text{ ms}$$

$$\tau = R.C \Rightarrow R = \frac{\tau}{C} \quad A.N:\ R = \frac{2{,}5.10^{-3}}{5.10^{-6}} \Rightarrow R = 500\ \Omega$$

2-Décharge du condensateur réel

2.1- Etablissement de l'équation différentielle :

Loi d'additivité des tensions : $u_{Rd} + u_C = 0 \Rightarrow Rd.i + u_C = 0 \Rightarrow Rd.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

$$Rd.C.\frac{dq}{dt}+q=0$$

2-2-1-La valeur de R_d :

La solution de l'équation différentielle:

$$q(t)=\beta.e^{-\lambda.t}\Rightarrow\frac{q(t)}{\beta}=e^{-\lambda.t}\Rightarrow-\lambda.t=\ln\left(\frac{q(t)}{\beta}\right)\Rightarrow t=-\frac{1}{\lambda}.\ln\left(\frac{q(t)}{\beta}\right)$$

On a : $q(0)=\beta.e^{0}\Rightarrow\beta=q_{max}$

$\frac{dq}{qt}=-\lambda.\beta.e^{-\lambda.t}$ on remplace dans l'équation différentielle :

$$-\lambda.\beta.Rd.C.e^{-\lambda.t}+\beta.e^{-\lambda.t}=0\Rightarrow\beta.e^{-\lambda.t}(1-\lambda.Rd.C)=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{Rd.C}=\frac{1}{\tau'}$$

$$t_1=-\frac{1}{\lambda}.\ln\left(\frac{q(t_1)}{\beta}\right)=-Rd.C.\ln\left(\frac{q_1}{q_{max}}\right)=Rd.C.\ln\left(\frac{C.u_{C\,max}}{C.u_1}\right)$$

A $t_1=12\text{ min}$ on a : $u_C=u_1=10\text{ V}$ quand $t\to\infty$ on a: $u_{Cmax}=E=12\text{ V}$

$$Rd=\frac{t_1}{C.\ln\left(\frac{E}{u_1}\right)}\Rightarrow A.N:\ Rd=\frac{12\times60}{5.10^{-6}\times\ln\left(\frac{12}{10}\right)}\Rightarrow Rd\simeq789{,}8.10^{6}\ \Omega$$

2-2-2-Calcul de p à t_1 :

$$p=\frac{\xi_J}{\xi_0}=\frac{\xi_0-\xi_{e1}}{\xi_0}=1-\frac{\xi_{e1}}{\xi_0}=1-\frac{\frac{1}{2}C.u_1^2}{\frac{1}{2}C.u_{Cmax}^2}=1-\frac{u_1^2}{u_{Cmax}^2}=1-\left(\frac{u_1}{E}\right)^2$$

A.N : $p=1-\left(\frac{10}{12}\right)^2=0{,}3055\Rightarrow p=30{,}55\ \%$

Partie 2

1-Classement des parties X , Y , Z et W :

1- Z , W , Y , X.

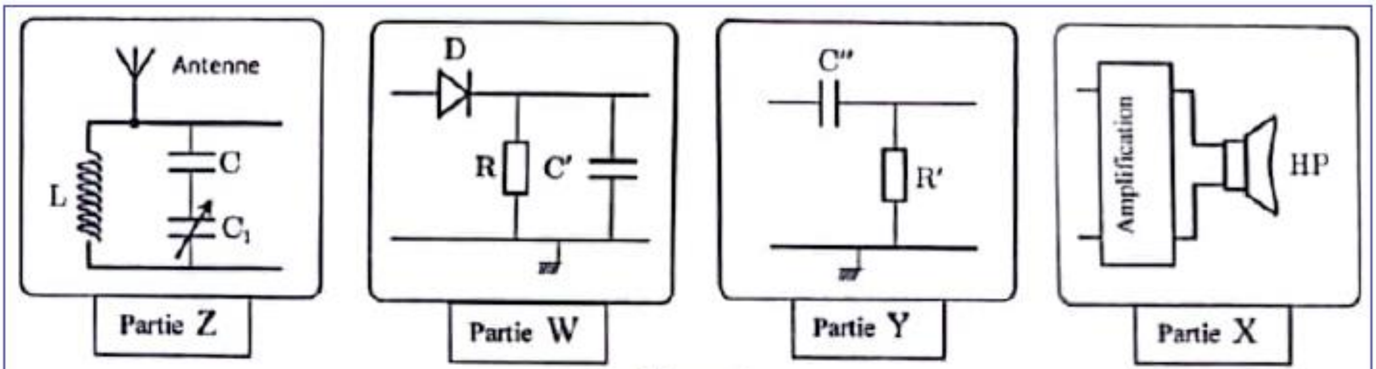


Figure 4

2- La proposition juste : D

3-La valeur de C_1 :

$$F_P=F_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{L.C_e}}\Rightarrow {F_P}^2=\frac{1}{4\pi^2L.C_e}\Rightarrow C_e=\frac{1}{4\pi^2L.{F_P}^2}$$

A.N : $C_e=\frac{1}{4\times10\times10^{-3}\times(160.10^3)^2}=1{,}1815.10^{-10}\text{ F}\Rightarrow C_e=118{,}15\text{ pF}$

Les deux condensateurs sont en série :

$$\frac{1}{C_e}=\frac{1}{C}+\frac{1}{C_1}\ \Rightarrow \frac{1}{C_1}=\frac{1}{C_e}-\frac{1}{C}=\frac{C-C_e}{C.C_e}\Rightarrow C_e=\frac{C.C_e}{C-C_e}$$

$$C_e=\frac{118{,}15\times 150}{118{,}15-150}\Rightarrow C_e=556{,}44\ \mathrm{pF}$$

4-Le conducteur ohmique qui convient :

$$T_P<<\tau<T_S\ \Rightarrow \frac{1}{F_P}<<R.C'<\frac{1}{F_S}\ \Rightarrow \frac{1}{C'.F_P}<<R<\frac{1}{C'F_S}$$

$$\frac{1}{20.10^{-9}\times 460.10^3}<<R<\frac{1}{10^3\times 460.10^3}\Rightarrow 108{,}7\ \Omega<<R<50000\Omega$$

$$108{,}7\ \Omega<<R<50\ \mathrm{k\Omega}\quad\Rightarrow\quad R=47\ \mathrm{k\Omega}$$

Exercice 4 :

Partie 1 :

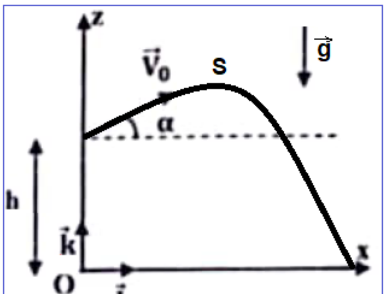


Figure 1

1- Les expressions de $V_x\,(t)$et $V_z\,(t)$:

Système étudié : {le projectile}

Bilan des forces : $\vec{P}$ poids du projectile

Application de la deuxième loi de Newton :

$$\sum\vec{F}_{ext}=m.\vec{a}_G\ \Rightarrow\vec{P}=m.\vec{a}_G\ \Rightarrow m.\vec{g}=m.\vec{a}_G\ \Rightarrow\vec{g}=\vec{a}_G$$

Projection dans le repère (o,x,z) :

$$\vec{a}_G\begin{vmatrix}a_x=0\\ a_z=-g\end{vmatrix}$$

Les conditions initiales : à $t_0=0$ on a :

$$\vec{V}_0\begin{vmatrix}V_{0x}=V_0.\cos\alpha\\ V_{0z}=V_0.\sin\alpha\end{vmatrix}\quad \text{et}\ \overrightarrow{OG_0}\begin{vmatrix}x_0=0\\ z_0=h\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_G\begin{vmatrix}a_x=\dfrac{d\,V_x}{dt}=0\\ a_z=\dfrac{d\,V_z}{dt}=-g\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{intégration}}\vec{V}_G\begin{vmatrix}V_x=V_{0x}\\ V_z=-gt+V_{0z}\end{vmatrix}\Rightarrow\vec{V}_G\begin{vmatrix}V_x=V_0.\cos\alpha\\ V_z=-gt+V_0.\sin\alpha\end{vmatrix}$$

2- L'expression de la norme V en fonction de t :

$$V^2=V_x{}^2+V_z{}^2\ \Rightarrow V=\sqrt{V_x{}^2+V_z{}^2}\Rightarrow V=\sqrt{(V_0.\cos\alpha)^2+(-gt+V_0.\sin\alpha)^2}$$

$$V=\sqrt{V_0{}^2.\cos^2\alpha+g^2.t^2-2g.t.V_0.\sin\alpha+V_0{}^2.\sin^2\alpha}=\sqrt{V_0{}^2.(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+g^2.t^2-2g.t.V_0.\sin\alpha}$$

$$V=\sqrt{g^2.t^2-2g.t.V_0.\sin\alpha+V_0{}^2}$$

3-1-La valeur V_0 :

Graphiquement $V_0 = 23 \ m.s^{-1}$

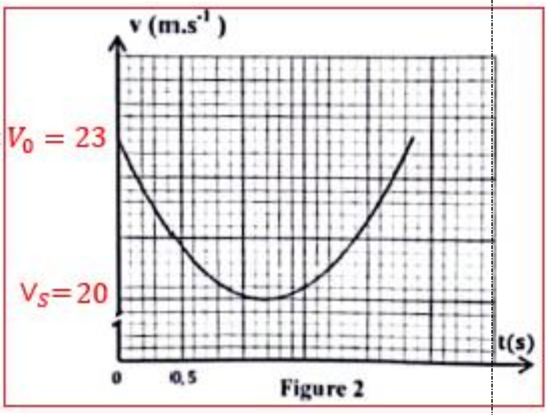


Figure 2

3-2- Les composantes de V_{0x} et V_{0z} de V_0 :

Au sommet de la trajectoire la vitesse $\vec{V}_S$ est horizontale c.à.d : $V_{Sz} = 0$

$$V_S = \sqrt{V_{Sx}^{2} + \underbrace{V_{Sz}^{2}}_{=0}} = V_{Sx} = V_{0x} = V_0.\cos\alpha$$

Au sommet de la trajectoire la vitesse est minimale, on trouve : $V_S = V_{0x} = 20 \ m.s^{-1}$

$$V_0^{\ 2} = V_{0x}^{\ 2} + V_{0z}^{\ 2} \Longrightarrow V_{0z}^{\ 2} = V_0^{\ 2} - V_{0x}^{\ 2} \Longrightarrow V_{0z} = \sqrt{V_0^{\ 2} - V_{0x}^{\ 2}}$$

$$V_{0z} = \sqrt{23^2 - 20^2} \Longrightarrow V_{0z} = 11{,}358 \ m.s^{-1}$$

4- Vérification de $\alpha = 30°$:

$$V_{0x} = V_0.\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{V_{0x}}{V_0} \Longrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{V_{0x}}{V_0}\right)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{20}{23}\right) = 26{,}59° \Longrightarrow \alpha \simeq 30°$$

5-1- Vérification de l'expression de Δt_1 :

$$\vec{V}_G \left| \begin{array}{l} V_x = \dfrac{dx}{dt} = V_0.\cos\alpha \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} = -gt + V_0.\sin\alpha \end{array} \right. \xRightarrow{\text{intégration}} \left| \begin{array}{l} x(t) = V_0.\cos\alpha + x_0 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin\alpha.t + z_0 \end{array} \right.$$

$$x(t) = V_0.\cos\alpha$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin\alpha.t + h$$

Pour $z = z_1$, on a $t = t_1$:

$$z_1 = -\frac{1}{2}gt_1^{\ 2} + V_0.\sin\alpha.t_1 + h \Longrightarrow -\frac{1}{2}gt_1^{\ 2} + V_0.\sin\alpha.t_1 + h - z_1 = 0$$

$$\Delta = (V_0.\sin\alpha)^2 + 4\frac{(h - z_1)g}{2} \Longrightarrow \Delta = (V_0.\sin\alpha)^2 + 2g(h - z_1)$$

$$t_1 = t_{N_1} = \frac{V_0.\sin\alpha - \sqrt{(V_0.\sin\alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g}$$

$$t'_1 = t_{M_1} = \frac{V_0.\sin\alpha + \sqrt{(V_0.\sin\alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g}$$

$$\Delta t_1 = t_{M_1} - t_{N_1} = \frac{V_0.\sin\alpha + \sqrt{(V_0.\sin\alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g} - \frac{V_0.\sin\alpha + \sqrt{(V_0.\sin\alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g}$$

$$\Delta t_1 = \frac{2\sqrt{(V_0.\sin\alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g}$$

De la même façon on trouve :

$$\Delta t_2 = t_{M_2} - t_{N_2} = \frac{2\sqrt{(V_0.\sin\alpha)^2 + 2g(h - z_2)}}{g}$$

5-2-L'expression de H et déduction de la valeur de g :

$$(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2 = \left(\frac{2\sqrt{(V_0.\sin\alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{(V_0.\sin\alpha)^2 + 2g(h - z_2)}}{g}\right)^2$$

$$(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2 = \frac{4(V_0.\sin\alpha)^2 + 8g(h - z_1)}{g^2} - \frac{4(V_0.\sin\alpha)^2 + 8g(h - z_2)}{g^2} =$$

$$(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2 = \frac{8g(h-z_1)}{g^2} - \frac{8g(h-z_2)}{g^2} = \frac{8}{g}(z_2 - z_1)$$ On pose $H = z_2 - z_1$

$$(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2 = \frac{8}{g}.H \quad \Longrightarrow H = \frac{g}{8}[(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2]$$

$$g = \frac{8H}{(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2} \Longrightarrow g = \frac{8 \times 0{,}49}{(0{,}7)^2 - (0{,}3)^2} \Longrightarrow g = 9{,}8\ m.s^{-2}$$

Partie 2 :

1-L'expression de l'énergie potentielle :

$$E_p = E_{pp} + E_{pe}$$

$$E_{pp} = m.g.z + Cte$$

L'état de référence : $E_{pp} = 0$ pour $z_0 = 0$ donc $Cte = 0$ et $E_{pp} = m.g.z$

Avec $z = \frac{a}{2}$; on obtient : $E_{pp} = m.g.\frac{a}{2}$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}K.\Delta\ell^2 + Cte \quad \text{avec} \quad \Delta\ell = x \text{ donc : } E_{pe} = \frac{1}{2}K.x^2 + Cte$$

L'état de référence : $E_{pe} = 0$ quand le système est en équilibre $x_0 = 0$ donc $Cte = 0$ on obtient :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}K.x^2$$

$$E_p = m.g.\frac{a}{2} + \frac{1}{2}K.x^2 \Longrightarrow E_p = \frac{1}{2}(m.g.a + K.x^2)$$

2- L'expression de $E_{pp}(t)$:

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[m.g.a + K.\left(x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)\right)^2\right] = \frac{1}{2}m.g.a + \frac{Kx_m^2}{2}.\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

Graphiquement $T = 0,2\ s$ avec $\quad T_0 = 2T = 2 \times 0,25 = 0,5\ s$

$$E_{p\,min} = 2\ mJ = 2.10^{-3}\ J \ \text{ et } \ E_{p\,max} = 8mJ \ = 8.10^{-3}\ J$$

$$-1 \leq \cos\alpha \leq -1 \ \Rightarrow 0 \leq \cos\alpha \leq 1$$

$\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) = 0$, on a: $E_p = E_{p\,min} = \frac{1}{2}m.g.a$

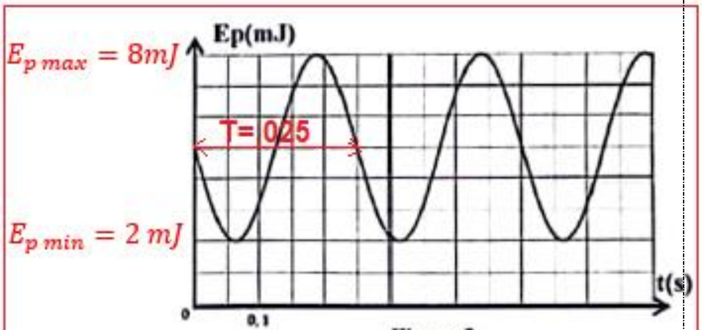


Figure 2

$$\frac{1}{2}m.g.a = 2.10^{-3}\ J$$

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) = 1$$

$$E_p = E_{p\,min} = \frac{1}{2}m.g.a + \frac{Kx_m^2}{2}$$

$$\frac{1}{2}m.g.a + \frac{Kx_m^2}{2} = 8.10^{-3}\ J$$

$$\frac{Kx_m^2}{2} = 8.10^{-3}\ J - 2.10^{-3}\ J = 6.10^{-3}\ J$$

$$E_p = 6.10^{-3}.\cos^2\left(\frac{2\pi}{0,5}.t + \varphi\right) + 2.10^{-3} \Rightarrow E_p = 6.10^{-3}.\cos^2(4\pi t + \varphi) + 2.10^{-3}$$

3-La valeur de m, K et φ :

-Valeur de m :

$$\frac{1}{2}m.g.a = 2.10^{-3}\ J \quad \Rightarrow m = \frac{4.10^{-3}}{g.a} \Rightarrow m = \frac{4.10^{-3}}{10 \times 2.10^{-2}} = 2.10^{-2}\ kg \Rightarrow m = 20\ g$$

-Valeur de K :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow T_0{}^2 = 4\pi^2.\frac{m}{K} \Rightarrow K = \frac{4\pi^2.m}{T_0{}^2} \Rightarrow K = \frac{4 \times 10 \times 2.10^{-2}}{(0,5)^2} \Rightarrow K = 3,2\ N.m^{-1}$$

-Valeur de φ :

Graphiquement on a : à $t_0 = 0$ on a : $E_p(0) = 5.10^{-3}\ J$

A $t_0 = 0$ on a : $E_p(0) = 6.10^{-3}.\cos^2\varphi + 2.10^{-3} \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{E_p(0) - 2.10^{-3}}{6.10^{-3}} = \frac{5.10^{-3} - 2.10^{-3}}{6.10^{-3}} = 0,5$

$$\cos^2\varphi = 0,5 \ \Rightarrow \cos\varphi = \pm\sqrt{0,5} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{4}$$

A $t_0 = 0$ on a : $x(0) = x_m.\cos\varphi \ > 0 \ \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x(0)}{x_m} > 0 \ \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

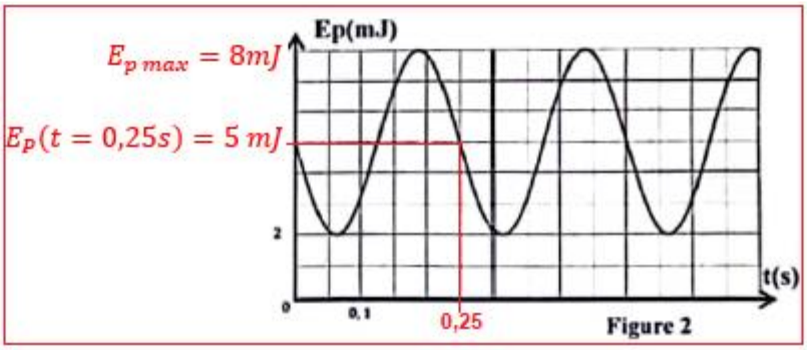
4-la norme de la vitesse à $t = 0,25s$:

$$E_m = E_p + E_C \quad \text{avec :} \begin{cases} E_m = E_{p\,max} \\ E_C = \frac{1}{2}m.V^2 \end{cases}$$

$$E_{p\,max} = E_{pp}(t) + \frac{1}{2}m.V^2 \Rightarrow V^2 = \frac{2\left(E_{p\,max} - E_{pp}(t)\right)}{m} \ \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2\left(E_{p\,max} - E_p(t)\right)}{m}}$$

Graphiquement voir figure 2 : $E_{p\,max} = 8.10^{-3}\ J$ et $E_p(t = 0,25s) = 5.10^{-3}\ J$

$$V = \sqrt{\frac{2(\mathbf{8.10^{-3}} - 5.10^{-3})}{2.10^{-2}}} = 0,5477\ m.s^{-1} \Longrightarrow V \simeq 0,55\ m.s^{-1}$$



www.svt-assilah.com