Systèmes mécaniques oscillants : exercices

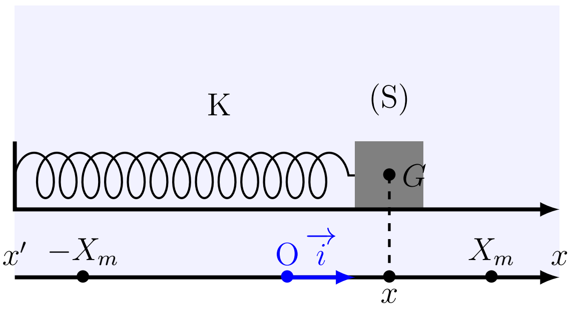
Exercice 1 :

1. Définir les notions suivantes :
   Oscillateur mécanique - mouvement oscillatoire - oscillation libre - amplitude de mouvement - élongation du mouvement - période propre - amortissement des oscillations mécaniques - oscillations forcées - oscillations entretenues - pendule élastique - pendule pesant - pendule simple - pendule de torsion .
2. Choisir la bonne réponse :
   (a) Plus la raideur d'un ressort est grande , plus la période du pendule élastique horizontal est :
   (a) grande (b) petite
   (b) La formule de la période des oscillations du pendule élastique horizontal n'est valable que pour des petites élongations :
   (a) vrai (b) faux
   (c) En présence de frottements , l'amplitude d'un pendule de torsion :
   (a) croit (b) décroît (c) reste constante
   (d) Plus la longueur du fil d'un pendule simple est grande , plus sa période est :
   (a) courte (b) longue
   (e) Plus la constante de torsion est grande , plus la période du pendule de torsion est :
   (a) grande (b) petite

Pendule élastique

Exercice 2 : résolution analytique de E.D

Un oscillateur mécanique élastique est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10N/m$ associé à un solide de masse $m = 250g$. On écarte le système de sa position d'équilibre de $2cm$ et on l'abandonne sans vitesse initiale.



On considère un axe $(O, \vec{i})$, avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre et le vecteur unitaire $\vec{i}$ parallèle au déplacement du solide.
On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = x(t)$.

1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

(a) Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .

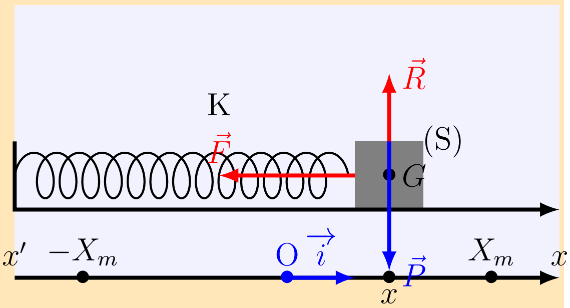
(b) Déterminer les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant t=0 , G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif .Écrire cette solution.

(c) Déterminer la vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions .

(d) Déterminer les caractéristiques de la force $\overrightarrow{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :
* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;
* lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$

Solution : exercice 2

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :
Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;
Système étudié : le solide (S) ;
Bilan des forces exercées sur le système : le poids $\vec{P}$, la réaction du plan horizontal $\vec{R}$ et la tension du ressort $\vec{F} = -K.\vec{\Delta l}$;



On applique la deuxième loi de Newton sur (S) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$$

On projette la relation sur $x'Ox$:

$$0 + 0 - K.\Delta l = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

d'où

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}.x = 0}$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

2.1 L'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique :
x(t) solution de l'équation différentielle , donc elle la vérifie , i.e on dérive deux fois x(t) par rapport au temps :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} x(t)$$

Pour que x(t) soit solution de l'E.D il suffit que

$$\frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

Application numérique : $T_0 \approx 1s$

2.2 On détermine les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant t=0 , G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif :

D'après les données de l'exercice on $X_m = 2.10^{-2}m$

En considérant les conditions initiales suivantes : à $t = 0$ on a $x(0) = 0$ passe par la position d'équilibre et $v(0) > 0$;

$X_m cos\varphi = 0$ donc $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

et puisque la vitesse à t=0 est positive : $-X_m\frac{2\pi}{T_0}sin\left(\varphi\right) > 0$ c'est à dire que $sin\varphi < 0$, d'où

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

donc la solution de E.D est :

$$\boxed{x(t) = 2 \times 10^{-2} cos\left(2.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

2.3 La vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions :

La vitesse des oscillations : $v(t) = -4 \times 10^{-2}\pi sin\left(2.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)$

Cette vitesse est maximale lorsque $sin\left(2.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ i.e que $v_{max} = 4 \times 10^{-2}\pi$

2.4 Les caractéristiques de la force $\overrightarrow{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :

L'intensité de la force : Est une force de rappel qui s'oppose au sens d'allongement $F(t) = K.x(t)$

* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;

nous avons $x(t) = 0$ donc $Ft) = 0$

* lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$

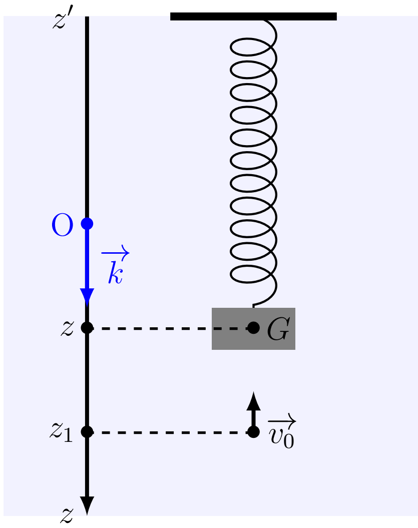
Pour $x = X_m$ nous avons $\vec{F} = K.X_m\vec{i}$ l'intensité de la force est maximale et dans le même sens que $\vec{i}$.

Pour $x = -X_m$ nous avons $\vec{F} = -K.X_m\vec{i}$ l'intesité est maximale et dans le sens opposé de $\vec{i}$

Exercice 3 : Pendule élastique vertical

Un pendule élastique vertical est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10N/m$ associé à un solide de masse $m = 300g$. On écarte le système de sa position d'équilibre de $z_1 = 2cm$ et à l'instant t=0 (origine des dates) on l'abandonne avec une vitesse initiale $v_0 = 0.3m/s$ dans le sens négatif de l'axe $(O, \overrightarrow{k})$ orienté vers le bas et avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre stable et le vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ parallèle au déplacement du solide.

On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = z(t)$.



1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}.z = 0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

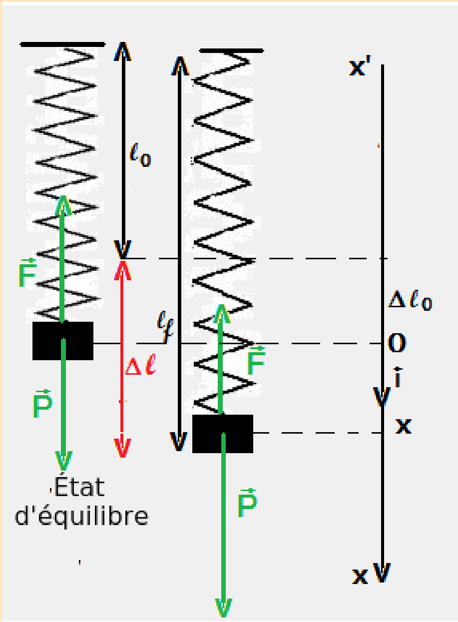
$$x(t) = Z_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

   (a) Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .

   (b) Déterminer les paramètres Z_m et φ .

3. Étudions le cas où on lance le système à t=0 , à partir de l'état d'équilibre stable , dans le sens positive avec une vitesse $v_0 = 0,3m/s$. Déterminer les paramètres Z_m et φ .

Solution : exercice 3



1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :
Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;
Système étudié : le solide (S) ;
Bilan des forces exercées sur le système : le poids $\vec{P}$ et la tension du ressort $\vec{F} = -K.\vec{\Delta l}$;
Étude du système à l'état d'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F} = -K.\vec{\Delta l_0} = \vec{0}$$

On projette sur $z'Oz$, on aura :

$$m.g - K.\Delta l_0 = 0 \qquad (1)$$

À l'instant t on applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a_z}$$

$$mg - K.\Delta l = m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

avec $\Delta l = \Delta l_0 + x$ Donc :

$$mg - K.\Delta l_0 - K.z = m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

et d'après l'état d'équilibre on a $m.g - K.\Delta l_0 = 0$, I.e que E.D sera :

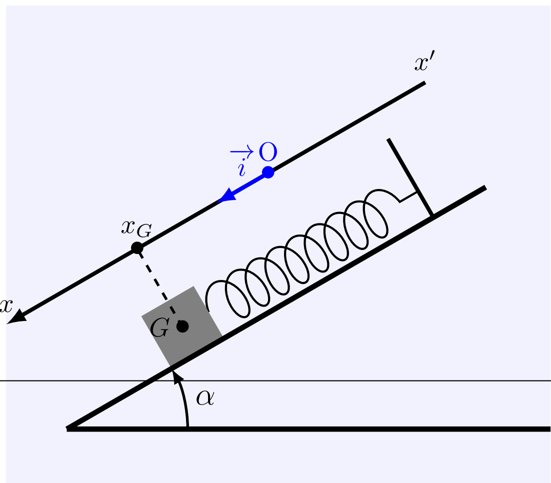
$$-K.x = m.\frac{d^2z}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{K}{m}.z = 0}$$

2.

Exercice 4 : Pendule élastique incliné

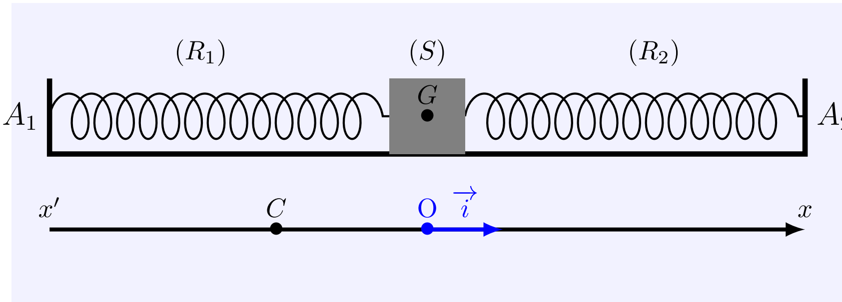
Un ressort de masse négligeable , à spires non jointives, parfaitement élastique n est accroché par l'une des extrémités à un support fixe et l'autre extrémité , on accroche un solide de masse $m = 500g$. L'ensemble est situé sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Les frottements sont négligé dans tout l'exercice .



1. Le ressort de longueur $l_0 = 20cm$ au repos , à l'équilibre la longueur du ressort est $l = 25cm$. En déduire la valeur de la constante du raideur K du ressort . On prend $g = 10m/s^2$
2. On écarte le solide vers le bas , de sa position d'équilibre à t=0 d'une distance de $d = 3cm$ et on le lâche sans vitesse initiale . Par une étude dynamique trouver l'équation horaire du mouvement .
3. La période des oscillations dépend-t-elle de l'angle α ?

Exercice 5 : Association de deux ressorts

On place un cavalier de masse $M = 700g$ sur un rail à coussin d'air horizontal et on le fixe aux extrémités de deux ressorts semblables R_1 et R_2 de mêmes constantes de raideur $K_1 = K_2 = 20N/m$. La longueur initiale de chaque ressort est $l_{01} = l_{02} = 18cm$ et à l'équilibre , ils ont même allongement $\Delta l_1 = \Delta l_2 = 2cm$.

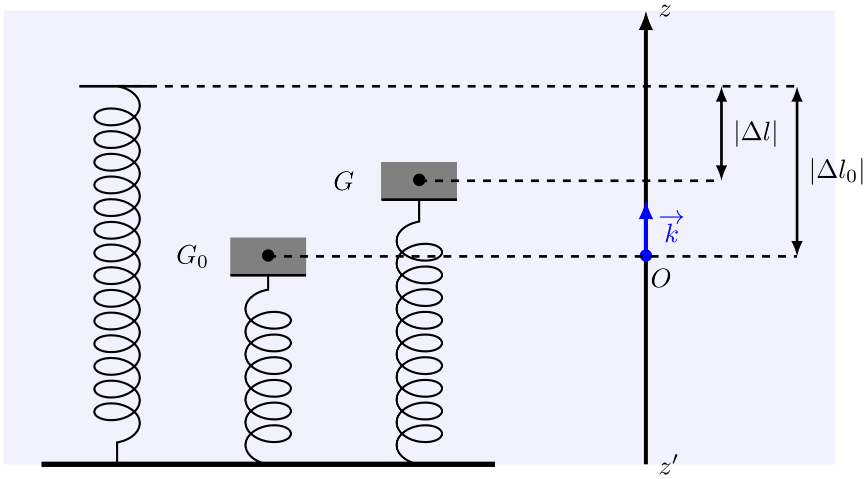


1. On écarte le cavalier de sa position d'équilibre de distance $OC = 2cm$ de sens vers A_1 et de direction de A_1A_2, puis on l'abandonne sans vitesse initiale , à l'instant t=0 .
   (a) Déterminer, À un instant t , les expressions des allongements de Δl_1 et Δl_2 pour chaque ressort en fonction de x l'abscisse de G
   (b) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de G .
   (c) La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :
   $$x't) = X_m cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$
   avec ω_0 est la pulsation propre du mouvement de G , $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$. Donner l'expression de ω_0 et T_0 . Déterminer φ et X_m
2. On fixe au cavalier une petite plaque de masse négligeable puis on l'immerge dans un liquide . Sachant que la force de frottement appliquée par le liquide sur la plaque au cours du mouvement du cavalier est de la forme $\vec{f})-\alpha.\vec{v}$ où α est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de G . Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G peut s'écrire sous la forme suivante :
   $$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{2K}{m}x = 0$$
3. Donner la forme des courbes qui représentent l'élongation x(t) du centre d'inertie G lorsque les frottement deviennent de plus en plus importants . (on prend les mêmes conditions initiales)

Exercice 6 :La suspension : les amortisseurs

La suspension d'une automobile se compose , au niveau de chaque roue , d'un ressort et d'un amortisseur (généralement à l'huile)

On modélise l'automobile par un solide de masse M de centre d'inertie G ; les ressorts par un seul ressort vertical , à spire non jointive, de masse négligeable et d'une constante de raideur K . Le système (ressort+solide) est représenté dans la figure ci-dessous :



Le repérage des positions z du centre d'inertie G du solide se fait selon un axe Oz orienté vers le haut ; l-origine O est choisie à la position d'équilibre G_0 du centre d'inertie du solide .

I. Étude du système à l'état d'équilibre .
   Pour la vérification de la valeur de la constante du raideur de ressort , on mesure la longueur initiale du ressort l_0, puis on place le solide (S) de masse $M = 100g$ sur le plateau de masse négligeable, fixé à l'extrémité libre du ressort . Ce dernier sera compressé de Δl_0 et sa longueur finale à l'équilibre $l = 7,6cm$.
   1. Calculer la constante de raideur K du ressort .
   2. Calculer l'erreur relative qui peut se commettre au cours de cette mesure par l'opérateur sur la constante de raideur du ressort . la valeur de K indiquée par le fabriquant est $K = 40N/m$. On donne la formule de l'erreur relative :
   $$\frac{\Delta X}{X} = \frac{X_{ex} - X_{th}}{X_{th}}$$

II. Étude dynamique :
   On écarte le système (ressort + solide) de sa position d'équilibre vers le bas de $2cm$ et on l'abandonne sans vitesse initiale . Le système effectue un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre G_0 .
   1. En appliquant la deuxième loi de Newton , montrer que l'équation différentielle du mouvement de G est :
   $$\ddot{z} + \frac{K}{M}z = 0$$
   2. Écrire la solution $z(t)$ de cette équation différentielle en fonction de f_0 la fréquence propre des oscillations , z_m et le temps t . En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$

3. En utilisant les expressions de $v(t)$ et $z(t)$, montrer que :

$$v = 2\pi f_0\sqrt{z_m^2 - z^2}$$

$$tan\Phi = -\frac{v}{2\pi f_0 z}$$

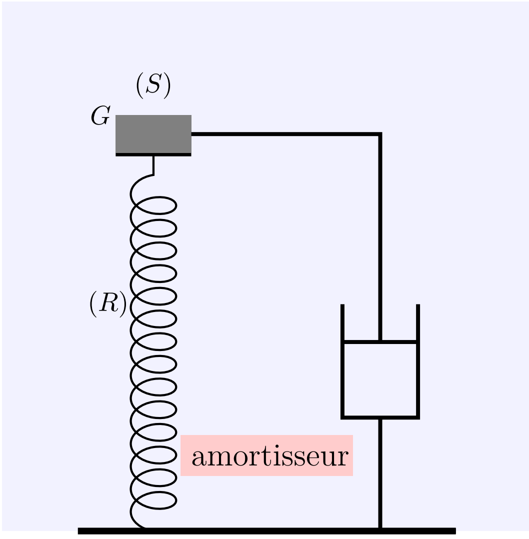
avec Φ est le déphasage de z(t) à l'instant t .

4. Calculer v la vitesse de G et Φ la phase du mouvement à l'instant $t = 2s$

II. Étude des oscillations forcées
Pour modéliser l'amortissement, on ajoute au dispositif précédent un amortisseur qui engendre une force de frottement fluide de sens opposé au vecteur vitesse du mouvement de G et proportionnelle à sa valeur tel que :

$$\overrightarrow{f} = -\alpha\frac{dz}{dt}.\overrightarrow{k}$$

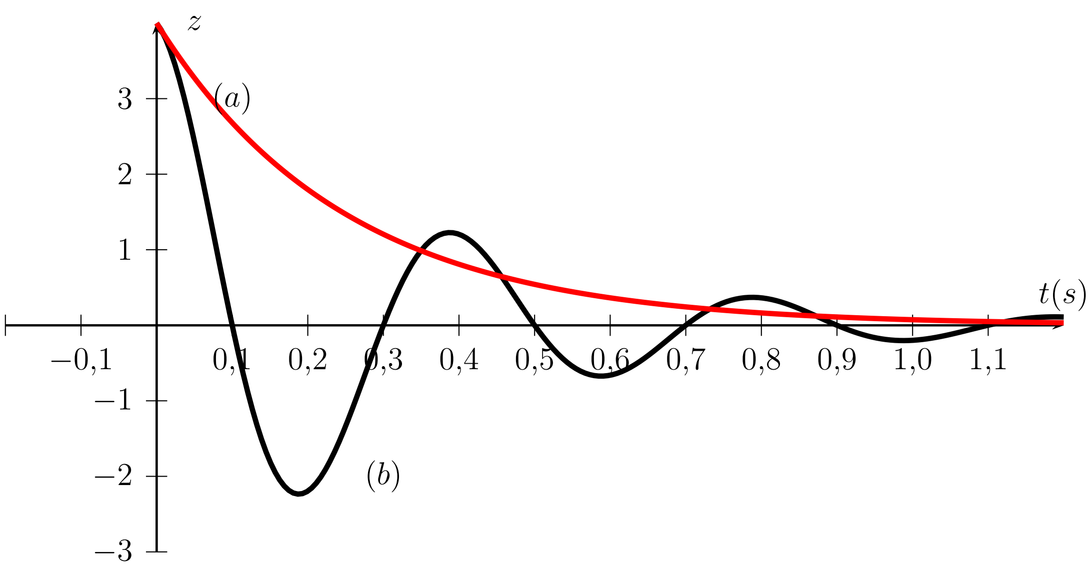
où α est une constante positive qui dépend de la qualité des amortisseurs appelée le coefficient d'amortissement .



1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G est :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha\frac{dz}{dt} + K.z = 0$$

2. Pour ce système mécanique , identifier l'excitateur et le résonateur .
3. On considère deux automobiles (A_1) et (A_2), assimilables chacune à un solide de même masse M reposant sur le ressort (R) vertical . On représente les courbes z(t) des positions du centre d'inertie G du solide modélisant chaque automobile lors de passage sur une bosse .



a. Donner les noms des régimes associés aux deux courbes .

b. L'une des courbes présente une pseudo-période . Déterminer graphiquement sa valeur .

c. Les allures différentes des courbes sont dues au coefficient d'amortissement α. Quelle courbe correspond à la plus grande valeur de α ? Justifier la réponse .

d. Quelle automobile possède la meilleure suspension ?