

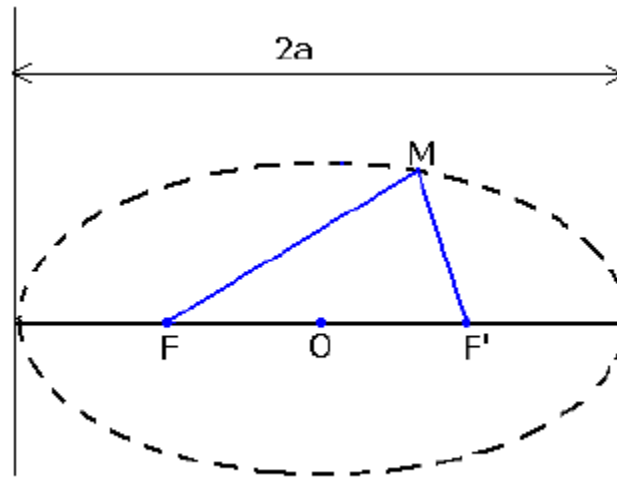
## Les lois de Kepler

L'étude du **mouvement des planètes** s'effectue dans un **repère héliocentrique** (on se place au centre du soleil).

L'étude du **mouvement des satellites** de la terre se fait dans un **repère géocentrique** (on se place au centre de la terre). Ces deux référentiels sont **considérés comme galiléens** (les lois de Newton y sont applicables).

### Première loi de Kepler:

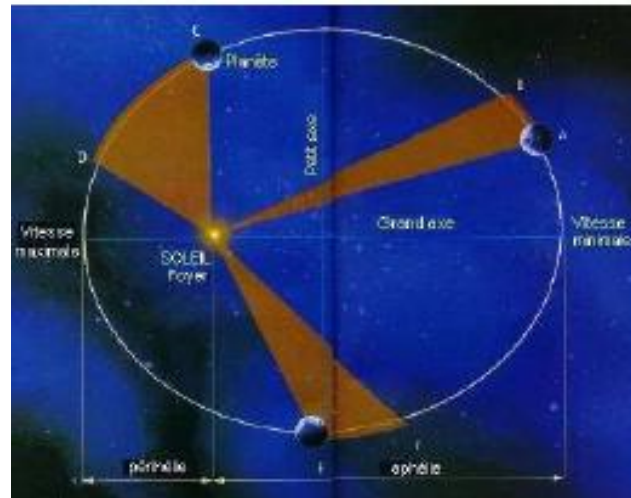
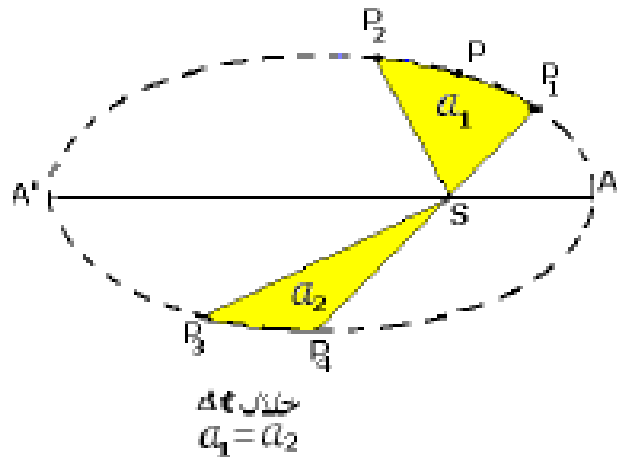
Dans le **référentiel héliocentrique**, le centre d'une planète gravitant autour du soleil suit une **trajectoire elliptique** dont **un des foyers est le centre du soleil**.



$$MF + MF' = 2a$$

### Deuxième loi de Kepler:

Le segment de droite qui relie le centre de la terre et le centre du soleil balaie des **aires proportionnelles aux durées mise pour les balayer**. Il balaie des aires égales pour des durées égales.



### Troisième loi de Kepler

Le carré de la période d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube de la longueur du demi-grand axe de son orbite.

**Ce rapport de proportionnalité est le même pour toutes les planètes du système solaire.** En posant  $a = AB/2$  on a donc:

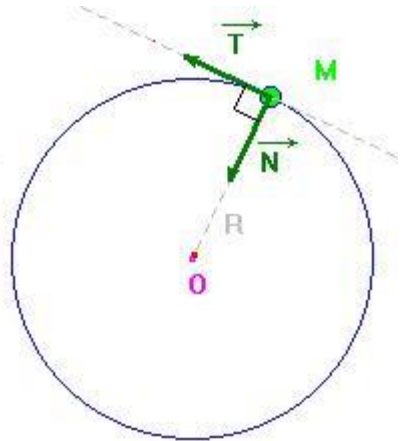
$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

- T : période de révolution de la planète en s
- a : longueur du demi-grand axe de l'orbite en m
- K : coefficient de proportionnalité en  $s^2 \cdot m^{-3}$

Lorsque **les deux foyers de l'ellipse** décrivant la trajectoire sont presque **confondus**, on assimile cette dernière à une **trajectoire circulaire uniforme**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{T}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + v \cdot \frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\vec{v} = v \cdot \vec{T}$$



$$v = \text{cte} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}$$

$$\|\Sigma \vec{F}_{\text{ext}}\| = \frac{mv^2}{r}$$

- $\|\Sigma \vec{F}_{\text{ext}}\|$ : norme du vecteur somme
- m: masse du solide mis en orbite en Kg
- v: vitesse du solide en orbite en m.s<sup>-1</sup>
- r: rayon de l'orbite en m

On déduit de cette relation et à l'aide de la seconde loi de Newton la **vitesse du solide en orbite circulaire**:

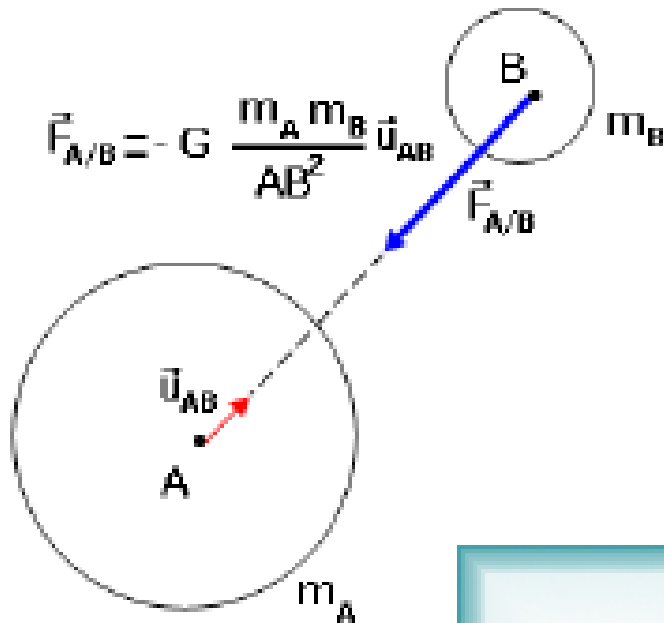
$$mg = \frac{mv^2}{r}$$



$$v = \sqrt{g r}$$

- v: vitesse du solide en orbite en m.s<sup>-1</sup>
- g: accélération de la pesanteur en m.s<sup>-2</sup>
- r: rayon de l'orbite en m

La loi de la gravitation universelle est donnée par la relation:

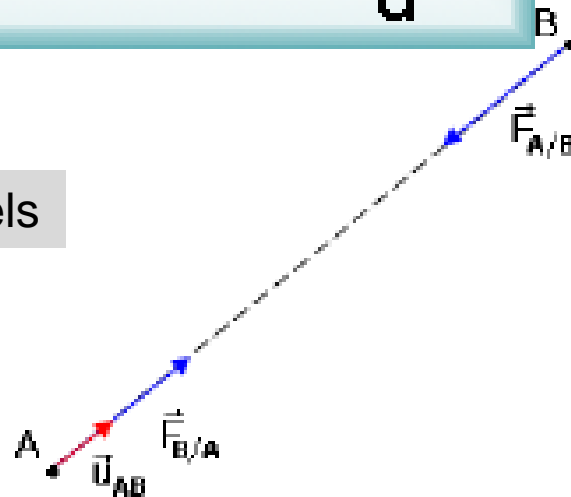


$$\vec{F}_{A/B} = -G \frac{m_A m_B}{AB^2} \vec{u}_{AB}$$

- $F_{A/B}$  : Force de l'objet A sur l'objet B en N
- $F_{B/A}$  : Force de l'objet B sur l'objet A en N
- G : constante de gravitation universelle en  $N \cdot m^2 \cdot Kg^{-2}$
- $m_A$  : masse de l'objet A en Kg
- $m_B$  : masse de l'objet B en Kg
- d : distance entre l'objet A et l'objet B en m

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G \frac{m_A m_B}{d^2}$$

Cas de deux solides ponctuels



## solide en orbite autour de la Terre:

Rotation du solide est un mouvement circulaire uniforme

Force exercée par la terre sur le solide

$$\vec{F}_{T/S} = -G \frac{M_T M_S}{r} \vec{u}_{TS}$$

Loi de Newton  $\vec{F}_{T/S} = -G \frac{M_T M_S}{r} \vec{u}_{TS} = M_S \vec{a}$

Avec  $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_{TS}$  Accélération normal



$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r}}$$

Remarque

$$r = R_T + z$$

De cette relation on déduit la **période de révolution d'un solide en orbite autour de la Terre:**

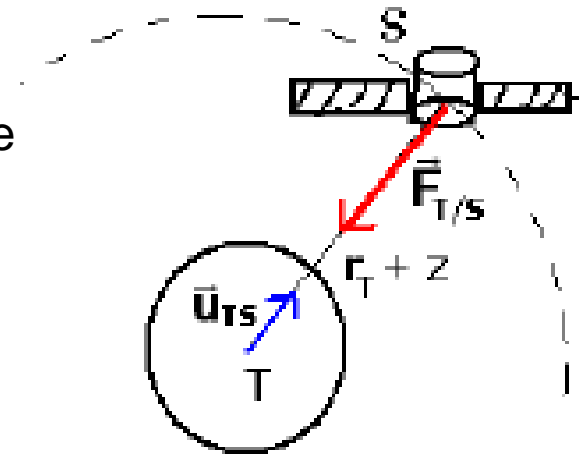
$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M_T}}$$

T : période de révolution de du solide en s

r : rayon de l'orbite circulaire en m

G : constante de gravitation universelle en  $N \cdot m^2 \cdot Kg^{-2}$

$M_T$  : masse de la Terre en Kg



Remarque

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

Ce rapport ne dépend pas du solide étudié

Un satellite qui reste en permanence **au dessus d'un point fixe de la Terre pris à l'équateur** est appelé « **satellite géostationnaire** ».

Un Satellite Géostationnaire est un Satellite qui reste toujours à la verticale d'un même point P de la Terre.

- Le plan de l'orbite dans le référentiel géocentrique est le plan équatorial.

Période de révolution d'un Satellite Géostationnaire :

C'est la durée pour effectuer un tour dans le référentiel géocentrique : c'est la durée d'un jour sidéral  $1 \text{ j} = 86164 \text{ s} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$



## Altitude de révolution d'un Satellite Géostationnaire :

$$T = \frac{2 \pi \sqrt{r^3}}{\sqrt{G \cdot M_T}} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \pi^2 r^3}{G \cdot M_T}$$

$$r^3 = \frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4 \pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4 \pi^2}}$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4 \pi^2}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4 \pi^2}} - R_T$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4 \pi^2}} - R_T$$

$$h \approx \sqrt[3]{\frac{86164^2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{24}}{4 \pi^2}} - 6400 \times 10^3$$

$$h \approx 3,58 \times 10^7 \text{ m} \approx 35\,800 \text{ km}$$

# Applications

## 1)- Détermination de la masse de la terre

Les Satellites géostationnaires de la Terre ont une orbite circulaire de rayon  $r_G = (R_T + h) = 42164 \text{ km}$  et une période  $T_G = 86164 \text{ s}$ . Calculer la masse  $M_T$  de la Terre.

On a 
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \pi^2}{G \cdot M_T} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad M_T = \frac{4 \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$$

$$M_T \approx \frac{4 \pi^2 \times (42164 \times 10^3)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (86164)^2}$$

$$M_T \approx 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

