∽ Baccalauréat L spécialité Métropole–La Réunion ∾
19 juin 2009

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

Deux annexes sont à rendre avec la copie

EXERCICE 1 **5 points**

Quatre affirmations sont données ci-dessous. Dire si chacune de ces quatre affirmations est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1+x^2\right)\mathrm{e}^x$ pour tout nombre réel x.
   Affirmation n° 1 : La courbe représentative de f est toujours située au-dessus de l'axe des abscisses .
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1}$ pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$.
   On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de g et A le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 0.
   Affirmation n° 2 : La tangente à $(\mathscr{C})$ en A a pour équation $y = 2x-1$.
3. Soit deux évènements A et B. $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de A. On suppose que la probabilité de A est égale à 0,4 et que la probabilité de l'évènement $\overline{A} \cap B$ est égale à $0,12$.
   Affirmation n° 3 : La probabilité de B sachant que $\overline{A}$ est réalisé est égale à $0,2$.
4. On lance deux dés cubiques équilibrés et on lit la somme des résultats des faces supérieures.
   Affirmation n° 4 : La probabilité d'obtenir une somme égale à 5 est égale à $\dfrac{5}{36}$.

EXERCICE 2 **4 points**

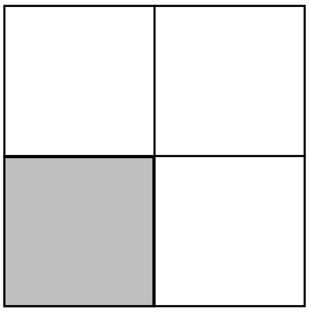
Dans cet exercice, on s'intéresse à la propriété « le nombre $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 », où n est un nombre entier naturel.

1. **a.** Existe-t-il un nombre entier naturel n pour lequel cette propriété est vraie ? Justifier.
   b. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^2 par 7 ?
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n,
$$9\left(3^{2n} - 2^n\right) + 7 \times 2^n = 3^{2(n+1)} - 2^{n+1}.$$
   b. En utilisant l'égalité précédente démontrer que, si pour un certain entier naturel n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, alors $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est aussi divisible par 7.
3. **Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**
   Le nombre $3^{2n} - 2^n$ est-il toujours divisible par 7, quel que soit le nombre entier naturel n ?

EXERCICE 3 **6 points**

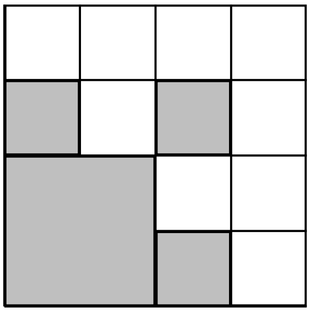
On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

Première étape du coloriage :
On partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-dessous (la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage :

On partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé.

Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale coloriée après n coloriages.
On a ainsi $A_1 = 1$.
La surface coloriée sur la figure à la 2^{e} étape du coloriage a donc pour aire A_2.

Les deux parties suivantes A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Calculer A_2 puis montrer que $\text{A}_3 = \dfrac{37}{16}$.
2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	P un entier naturel non nul.
Initialisation :	N = 1 ; U = 1.
Traitement :	Tant que N $\leqslant$ P : Afficher U Affecter à N la valeur N +1 Affecter à U la valeur $\dfrac{5}{4} \times \text{U} + \dfrac{1}{2}$

   a. Faire fonctionner cet algorithme avec P = 3.

   b. Cet algorithme permet d'afficher les P premiers termes d'une suite U de terme général U_n.
   Dire si chacune des deux propositions suivantes est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

Proposition 1 : Il existe un entier naturel n strictement supérieur à 1 tel que $U_n = A_n$.
Proposition 2 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $U_n = A_n$.

Partie B

On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A_{n+1} = \frac{3}{4}A_n + 1$.

1. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_n = A_n - 4$.

a. Calculer B_1.

b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_{n+1} = \frac{3}{4}B_n$.

c. Quelle est la nature de la suite (B_n) ?

d. Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n.

2. Quel est le comportement de A_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier la réponse. Donner une interprétation de ce résultat en rapport avec l'aire de la surface coloriée.

EXERCICE 4 — 5 points

Dans tout l'exercice, A, B, C, D, E, F, G et H sont les sommets d'un cube opaque dont la face ABCD est posée sur le sol.

Trois dessins sont donnés en annexes. Ils correspondent aux trois questions de l'exercice qui sont indépendantes. Ces dessins sont à compléter au fur et à mesure de la résolution de l'exercice et à rendre avec la copie. On laissera apparents les traits de construction.

1. Le dessin n° 1 donné en annexe est la représentation en perspective parallèle du cube ABCDEFGH. Ce cube est éclairé par le soleil suivant la direction indiquée par l'ombre E′ du sommet E. Compléter ce dessin par l'ombre de ce cube sur le sol, les rayons du soleil étant considérés parallèles. On repassera en couleur le dessin fini de l'ombre au soleil du cube pour en améliorer la lisibilité.

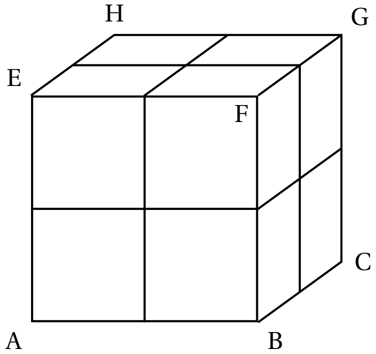
2. On veut construire sur le dessin n° 2 la représentation en perspective centrale du cube ABCDEFGH, l'arête [BF] étant dans le plan frontal. Les images des sommets A, B, C,... sont désignées par les lettres minuscules a, b, c, ...

On a tracé la ligne d'horizon (Δ) et la diagonale [ac] qui est parallèle à la ligne d'horizon.

a. Construire les points de distance d_1 et d_2.

b. Terminer la représentation en perspective centrale du cube en repassant le dessin en couleur pour en améliorer la lisibilité.

3. On entoure ce cube d'une ficelle passant par les milieux des arêtes comme indiqué sur le dessin ci-dessous.

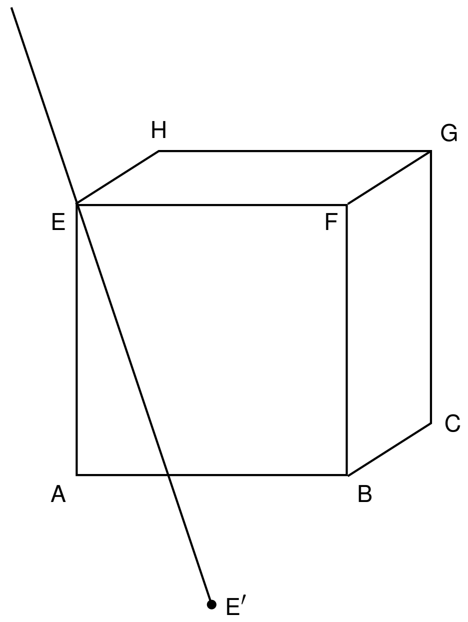


Le dessin n° 3 est la représentation en perspective centrale du cube ABCDEFGH, la face ABFE étant placée dans un plan frontal. (Δ) est la ligne d'horizon.

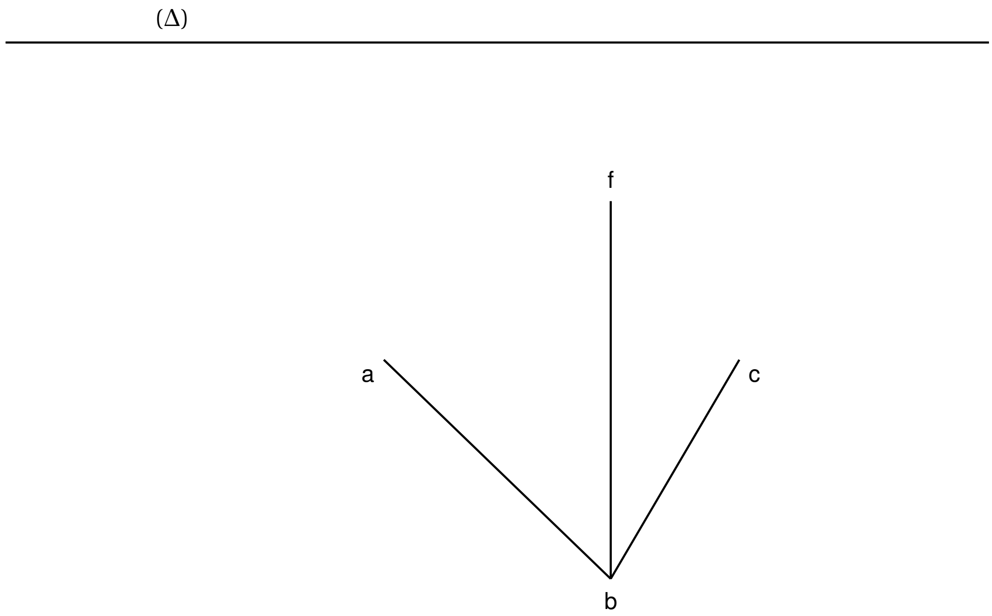
Compléter le dessin n° 3 par une représentation de cette ficelle.

Annexe 1 (à compléter et à rendre avec la copie)

Dessin n° 1



Dessin n° 2



Annexe 2 (à compléter et à rendre avec la copie)

Dessin n° 3