Durée : 3 heures

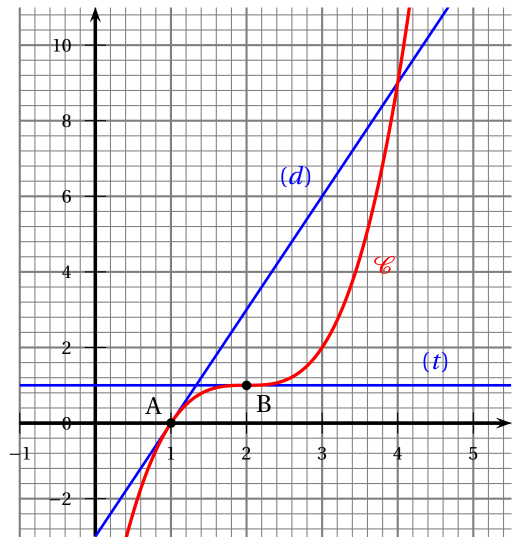
Corrigé du baccalauréat Terminale ES Polynésie 2 septembre 2020

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Seules les affirmations 1, 2 et 3 s'appuient sur la figure ci-dessous dans laquelle :

- la courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction g définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- le point A est le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 et le point B celui d'abscisse 2,
- la droite (d) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A,
- la tangente (t) à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est horizontale.



Affirmation 1

$g'(1) = 1$

Le nombre dérivé $g'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 ; or ce coefficient directeur est égal à $\dfrac{6}{2} = 3$.

Affirmation 1 fausse

Affirmation 2

Toute primitive de la fonction g est strictement croissante sur $[0\,;\,3]$.

Une primitive de g a pour dérivée g ; or $g(x) < 0$ sur $[0\,;\,1[$ donc sur cet intervalle une primitive de g est décroissante.

Affirmation 2 fausse

Affirmation 3

Le point B est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction g.

Le point B est un point d'inflexion puisque la courbe traverse sa tangente au point B.

Affirmation 3 vraie

Affirmation 4

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression $f(x) = x\,\mathrm{e}^{3x}$.

La fonction dérivée de f notée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en dérivant le produit :

$f'(x) = \mathrm{e}^{3x} + 3x\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}(1 + 3x)$.

Affirmation 4 fausse

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties de cet exercice sont indépendantes.
Le syndrome d'apnée du sommeil se manifeste par des interruptions répétées de la respiration pendant le sommeil. Ce syndrome peut être dû à plusieurs facteurs.

Partie A

Sauf indication contraire, les résultats numériques seront approchés à 10^{-4} près

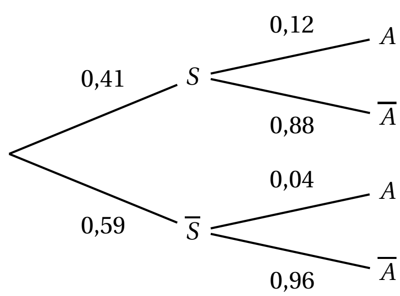
Dans cette partie, on cherche à étudier le lien entre le surpoids et le syndrome d'apnée du sommeil dans une population donnée.
Parmi les personnes participant à l'étude, 41 % sont en surpoids.
On observe que parmi les individus en surpoids, 12 % souffrent du syndrome d'apnée du sommeil, et que parmi les individus qui ne sont pas en surpoids, 4 % souffrent du syndrome d'apnée du sommeil.

Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $p(E)$ sa probabilité.

Pour tout évènement F de probabilité non nulle, on note $P_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On choisit au hasard une personne ayant participé à l'étude, et on note :
- S l'évènement : « la personne est en surpoids » ;
- A l'évènement : « la personne souffre d'apnée du sommeil ».

1. On représente cette situation par un arbre pondéré.



2. La probabilité que la personne choisie soit en surpoids et souffre d'apnée du sommeil est :
$p(S \cap A) = p(S) \times p_S(A) = 0{,}41 \times 0{,}12 = 0{,}049\,2$.
3. On a de même $p\left(\overline{S} \cap A\right) = p\left(\overline{S}\right) \times p_{\left(\overline{S}\right)}(A) = 0{,}59 \times 0{,}04 = 0{,}023\,6$.

   D'après la loi des probabilités totales :

   $p(A) = p(S \cap A) + p\left(\overline{S} \cap A\right) = 0{,}049\,2 + 0{,}023\,6 = 0{,}072\,8$.

   Cela signifie que parmi les participants à l'étude à peu près 7 % font des apnées du sommeil.
4. On choisit au hasard une personne qui souffre du syndrome d'apnée du sommeil.
La probabilité que cette personne soit en surpoids est :
$p_A(S) = \dfrac{p(A \cap S)}{p(A)} = \dfrac{0{,}049\,2}{0{,}072\,8} \approx 0{,}675\,82 \approx 0{,}675\,8$ à 10^{-4} près.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au cas particulier d'un patient souffrant d'apnée du sommeil.
Pendant plusieurs nuits, on observe son rythme respiratoire au cours de son sommeil. Ces examens permettent d'établir que la durée, en seconde, des apnées de ce patient peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 22$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Pour la loi normale on sait que :
   $p(14 \leqslant D \leqslant 30) = p(\mu - 2\sigma \leqslant D \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954 \approx 0{,}95$ au centième près.
   Cela signifie que la durée d'une apnée est dans l'intervalle $[14\,;\,30]$ dans 95 % des cas.
2. La probabilité qu'une apnée de ce patient dure plus de 30 secondes est : $p(D > 30)$.
   Or $p(D > 30) = p(D < 14)$, donc $p(D > 30) = 1 - [p(D < 14) + p(14 \leqslant D \leqslant 30)]$, soit
   $2p(D > 30) = 1 - p(14 \leqslant D \leqslant 30) \approx 0{,}046$, d'où $p(D > 30) \approx 0{,}023 \approx 0{,}02$.

Partie C

Une entreprise d'équipement médical commercialise un dispositif de ventilation en pression positive continue. Ce dernier permet de maintenir ouvertes les voies respiratoires du patient, prévenant ainsi les apnées du sommeil.

L'entreprise affirme que 91 % des patients qui utilisent le dispositif ressentent une amélioration de la qualité de leur sommeil.
Donc il y a une probabilité de $p = 0{,}91$ que le patient ressente une amélioration.
Une étude est menée sur 348 patients auxquels on fait tester le dispositif. Après plusieurs nuits, 290 personnes déclarent avoir ressenti une amélioration de la qualité de leur sommeil.
$n = 348 \geqslant 30$, $np = 316{,}68 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 31{,}32 \geqslant 5$ donc on peut établir un intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de patients dont le dispositif améliore le sommeil, au risque de 5 % :

$$\begin{aligned} I_{348} &= \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0{,}91 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}91\,(1-0{,}91)}}{\sqrt{348}}\,;\, 0{,}91 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}91\,(1-0{,}91)}}{\sqrt{348}}\right] \approx [0{,}88\,;\,0{,}94] \end{aligned}$$

Dans l'échantillon de l'étude, la fréquence d'amélioration est égale à $\dfrac{290}{348} \approx 0{,}833$.
Or $0{,}833 \notin I_{348}$ donc on peut remettre en cause l'affirmation de l'entreprise d'équipement médical.

Exercice 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Au 31 décembre 2017, un magazine possède 450 000 abonnés. On note que chaque année, seuls 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement auxquels viennent s'ajouter 180 000 nouveaux abonnés.

On note (u_n) une suite modélisant le nombre d'abonnés, exprimé en millier, au 31 décembre de l'année $(2017 + n)$. On a donc $u_0 = 450$.

1. On calcule, selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2018.
   On a $u_1 = 0{,}80 \times 450 + 1800 = 360 + 180 = 540$ milliers d'abonnés le 31 décembre 2018.
2. Le nombre d'abonnés (en milliers) de l'année précédente est multiplié par $\dfrac{80}{100} = 0{,}80$ et 180 000 nouveaux abonnés s'ajoutent, donc $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 180$ pour tout entier naturel n.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 900$.
   a. On a pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 900 = 0{,}8u_n + 180 - 900$ ou encore :
   $v_{n+1} = 0{,}8u_n - 720 = 0{,}8u_n - 0{,}8 \times 900 = 0{,}8(u_n - 900) = 0{,}8v_n$.
   $v_{n+1} = 0{,}8v_n$ quel que soit le naturel n montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 900 = 450 - 900 = -450$.

   b. Soit n un entier naturel.
   On sait qu'alors $v_n = v_0 \times q^n = -450 \times 0{,}8^n$ quel que soit le naturel n.

c. $v_n = u_n - 900 \iff u_n = v_n + 900$ donc $u_n = 900 - 450 \times 0{,}8^n$ quel que soit le naturel n.

4. La direction du magazine affirme qu'à long terme, le nombre d'abonnés dépassera 900 000.
Le produit $450 \times 0{,}8^n > 0$, donc $-450 \times 0{,}8^n < 0$ et en ajoutant 900 à chaque membre :
$900 - 450 \times 0{,}8^n < 900$ ou encore $u_n < 900$: le nombre d'abonnés est inférieur à 900 (mille) quel que soit n.

5. En s'appuyant sur ce modèle, on cherche au 31 décembre de quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 800 000 pour la première fois.
Il faut trouver n tel que $u_n > 800$ ou encore $900 - 450 \times 0{,}8^n > 800$ ou $100 > 450 \times 0{,}8^n$ ou $\dfrac{100}{450} > 0{,}8^n$ ou $\dfrac{2}{9} > 0{,}8^n$ soit par croissance du logarithme népérien $\ln\frac{2}{9} > n \ln 0{,}8$ ou encore $n > \frac{\ln\frac{2}{9}}{\ln 0{,}8}$.
$\frac{\ln\frac{2}{9}}{\ln 0{,}8} \approx 6{,}7$; il faudra attendre 7 ans, soit le 31 décembre 2024.

6. La direction du magazine s'engage à verser chaque année 1 euro par abonnement à une association caritative.
On dispose de l'algorithme ci-dessous :

```
U ← 450
S ← 450
Pour I allant de 1 à N
    U ← 0,8 * U + 180
    S ← S + U
Fin Pour
```

On affecte 3 à la variable N et on exécute l'algorithme.

a. L'algorithme tourne trois fois. S prend les valeurs : 450 ; 540 ; 612 ; 669,6.

b. La dernière valeur trouvée signifie que la direction du magazine va verser au bout de la troisième année $669{,}6 \times 1\,000 = 669\,600$ € à l'association caritative.

Exercice 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Deux plateformes proposant des films en streaming se font concurrence sur le marché : Webflix et Yellow Cinéma.
Au 1er janvier 2019, 63 % des utilisateurs de ces plateformes sont abonnés à Webflix et les 37 % restants à Yellow Cinéma. On souhaite étudier l'évolution du marché au fil du temps.

On estime que chaque mois :

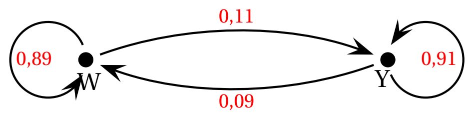
- parmi les clients de Webflix, 89 % renouvellent leur abonnement tandis que les autres quittent la plateforme pour s'abonner à Yellow Cinéma.
- parmi les clients de Yellow Cinéma, 91 % renouvellent leur abonnement tandis que les autres quittent la plateforme pour s'abonner à Webflix.

On suppose également que le nombre total de clients reste constant.
Pour tout entier naturel n, on note :
- w_n la proportion de clients abonnés à Webflix n mois après le 1er janvier 2019.
- y_n la proportion de clients abonnés à Yellow Cinéma n mois après le 1er janvier 2019.

L'état probabiliste n mois après le 1er janvier 2019 est noté $P_n = \begin{pmatrix} w_n & y_n \end{pmatrix}$.

On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix}0,63 & 0,37\end{pmatrix}$.
On rappelle que pour tout entier naturel n, $w_n + y_n = 1$.

1. O, représente la situation par un graphe probabiliste dans lequel on notera respectivement W et Y les sommets correspondants aux plate-formes Webflix et Yellow Cinéma :



2. a. En considérant les sommets dans leur ordre alphabétique, la matrice de transition de ce graphe est $M = \begin{pmatrix}0,89 & 0,11\\0,09 & 0,91\end{pmatrix}$.

b. $P_1 = P_0M = \begin{pmatrix}0,63 & 0,37\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,89 & 0,11\\0,09 & 0,91\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,594 & 0,406\end{pmatrix}$.

Puis $P_2 = P_1M = \begin{pmatrix}0,594 & 0,406\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,89 & 0,11\\0,09 & 0,91\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,5652 & 0,4348\end{pmatrix}$.

3. $P_{n+1} = P_nM = \begin{pmatrix}w_n & y_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,89 & 0,11\\0,09 & 0,91\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,89w_n + 0,09y_n & 0,11w_n + 0,91y_n\end{pmatrix}$.

Or $P_{n+1} = \begin{pmatrix}w_{n+1} & y_{n+1}\end{pmatrix}$, donc par identification :
$w_{n+1} = 0,89w_n + 0,09y_n$ d'où $w_{n+1} = 0,89w_n + 0,09(1 - w_n) \iff$
$w_{n+1} = 0,89w_n + 0,09 - 0,09w_n$, soit finalement :

$$w_{n+1} = 0,8w_n + 0,09.$$

4. On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n, par $a_n = w_n - 0,45$.

a. $a_{n+1} = w_{n+1} - 0,45 = 0,8w_n + 0,09 - 0,45$ ou $a_{n+1} = 0,8w_n - 0,36$
$= 0,8w_n - 0,8 \times 0,45 = 0,8(w_n - 0,45) = 0,8a_n$.

$a_{n+1} = 0,8a_n$ montre que la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $a_0 = w_0 - 0,45 = 0,63 - 0,45 = 0,18$.

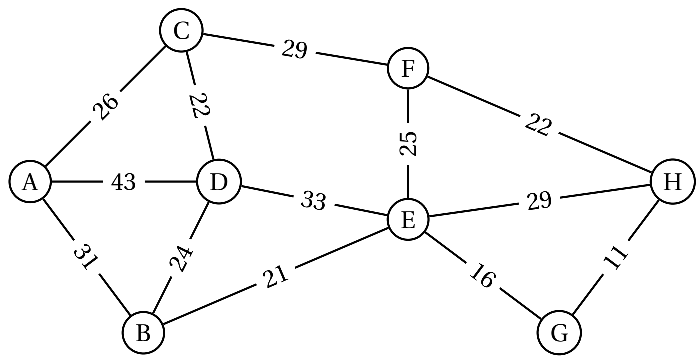
b. Pour tout n, $a_n = a_0 \times q^n = 0,18 \times 0,8^n$ quel que soit le naturel n.

c. De $a_n = w_n - 0,45$ on déduit $w_n = a_n + 0,45 = 0,18 \times 0,8^n + 0,45$.
Quel que soit le naturel n, $w_n = 0,18 \times 0,8^n + 0,45$.

5. Comme $0 < 0,8 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0,45 < 0,5$.
La suite (w_n) est une suite décroissante car la suite $(0,8^n)$ l'est, donc à terme la répartition sera 0,45 contre 0,55 pour Yellow Cinéma.

Partie B

Le réseau de serveurs permettant à Webflix de diffuser les films que la plateforme propose à ses abonnés est modélisé par le graphe ci-dessous. Les sommets représentent les serveurs et sur les arêtes on a indiqué les temps de réponse, exprimés en milliseconde, entre deux serveurs.



Des données doivent transiter du serveur A vers le serveur H.

1. On détermine, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, un chemin que doivent suivre ces informations pour que la transmission soit la plus rapide possible :

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet choisi
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
•	(31, A)	(26,A)	(43,A)					C
•	(31, A)	•	(43, A)		(55, C)			B
•	•	•	(43, A)	(52, B)	(55, C)			D
•	•	•	•	(52, B)	(55, C)			E
•	•	•	•	•	(55, C)	(68, E)	(81, E)	F
•	•	•	•	•	•	(68, E)	(77, F)	G
•	•	•	•	•	•	•	(77, F)	H

Le chemin le plus court est donc A – C – F – H.

2. Le temps de réponse le plus court est donc de $26+29+22 = 77$ millisecondes.

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On étudie l'évolution du taux de natalité d'une population entre 1750 et 1870.

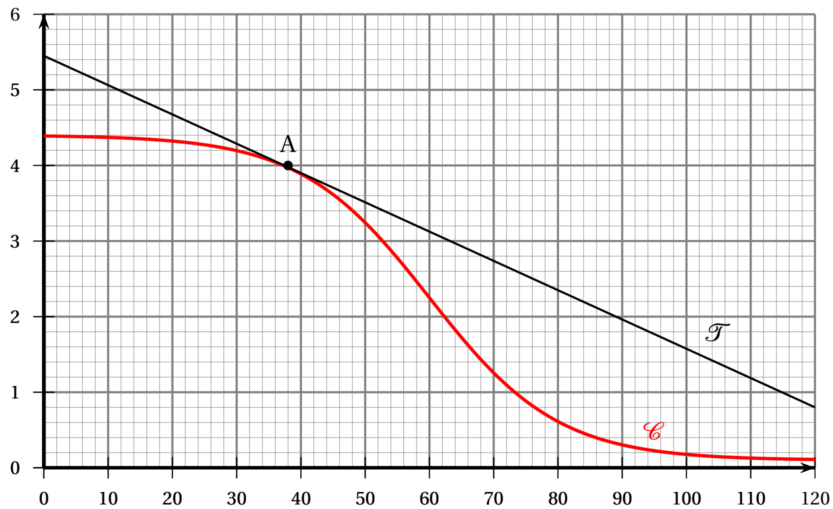
On admet que le taux de natalité peut être modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,120]$ par :

$$f(x) = 0{,}1 + \frac{4{,}3}{1+\mathrm{e}^{0{,}1x-6}}$$

où :

- x représente le temps, exprimé en années, écoulé depuis 1750,
- $f(x)$ représente le taux de natalité, exprimé en pourcentage, de la population totale. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,120]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction f, et la droite $\mathscr{T}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 38.



Partie A

1. **a.** $f'(38) \approx \dfrac{0,8-4}{120-38} = \dfrac{-3,2}{82} \approx -0,039$.

   b. Parmi les propositions suivantes, on encadre celle qui est exacte :

$$7 \leqslant \int_{10}^{30} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 8 \quad ; \quad \boxed{130 \leqslant \int_{30}^{120} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 190} \quad ; \quad 700 \leqslant \int_{80}^{100} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 800$$

2. **a.** La dérivée de $\mathrm{e}^{0,1x-6}$ est $0,1\,\mathrm{e}^{0,1x-6}$, donc en dérivant le quotient :
   $f'(x) = -\dfrac{4,3\times 0,1\,\mathrm{e}^{0,1x-6}}{\left(1+\mathrm{e}^{0,1x-6}\right)^2} = -\dfrac{0,43\,\mathrm{e}^{0,1x-6}}{\left(1+\mathrm{e}^{0,1x-6}\right)^2}$.

   b. Comme quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{0,1x-6} > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{0,1x-6}\right)^2 > 0$, $f'(x) < 0$, la fonction est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,120]$.
   On a $f(0) = 0,1 + \dfrac{4,3}{1+\mathrm{e}^{-6}} \approx 4,4$ et $f(20) = 0,1 + \dfrac{4,3}{1+\mathrm{e}^{6}} \approx 0,11$.

3. **a.** D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $0,11 < 1 < 4,4$ et que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,120]$, il existe un réel unique α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 1$

   b. La calculatrice donne $f(72) \approx 1,02$ et $f(73) \approx 0,95$, donc $72 < \alpha < 73$.

Partie B

1. On admet que sur l'intervalle $[0\,;\,120]$, la fonction g d'expression $g(x) = \dfrac{4,3}{\left(1+\mathrm{e}^{0,1x-6}\right)}$ a pour primitive la fonction G d'expression $G(x) = -43\ln\left(1+\mathrm{e}^{-0,1x+6}\right)$.

   a. $f(x) = 0,1 + g(x)$ donc une primitive F de f sur l'intervalle $[0\,;\,120]$ est définie par :
   $F(x) = 0,1x + G(x) = 0,1x - 43\ln\left(1+\mathrm{e}^{-0,1x+6}\right)$.

   b.
$$\begin{aligned}\int_{30}^{120} f(x)\,\mathrm{d}x &= [F(x)]_{30}^{120} = \left[0,1x - 43\ln\left(1+\mathrm{e}^{-0,1x+6}\right)\right]_{30}^{120}\\ &= 0,1\times 120 - 43\ln\left(1+\mathrm{e}^{-12+6}\right) - \left[0,1\times 30 - 43\ln\left(1+\mathrm{e}^{-3+6}\right)\right]\\ &= 12-3-43\ln\left(1+\mathrm{e}^{-6}\right)+43\ln\left(1+\mathrm{e}^{3}\right) = 9-43\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{-6}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{3}\right)\right]\end{aligned}$$

2. 1780 correspond à $x = 30$ et 1870 à $x = 120$.
   La valeur moyenne de la fonction taux de natalité sur l'intervalle $[30\,;\,120]$ est égale à :
   $t_m = \dfrac{1}{120-30}\displaystyle\int_{30}^{120} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{90}\left[9-43\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{-6}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{3}\right)\right]\right] \approx 1,56\,\%$ au centième près.