∽ Baccalauréat ES Polynésie ∾
4 septembre 2013
Corrigé

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Aucune justification n'était demandée dans cet exercice.

1. Une équation de la tangente à C_f en A est $y = -\mathrm{e}\,x + 2\,\mathrm{e}$; **réponse a.**
   *Le coefficient directeur de la tangente doit être négatif, ce qui élimine les réponses **b** et **c** ; l'ordonnée à l'origine est inférieure à 6 donc elle ne peut pas être égale à* $4\,e \approx 10{,}9$ *ce qui élimine la réponse **d.***
2. La fonction f est concave sur $[0~;~2]$; **réponse c.**
   Sur $[0~;~2]$, *la courbe est située au-dessous de chacune de ses tangentes.*
3. La valeur de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est $16\mathrm{e} - 24\sqrt{\mathrm{e}}$; **réponse b.**
   La fonction f est positive sur $[0;2]$. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ *représente l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 2$. *Elle doit être un nombre positif, donc on élimine la réponse **d**. La réponse **a**,* $50\,e \approx 136$, *est trop grande, la réponse **c**,* $0{,}1\,e \approx 0{,}27$ *est trop petite.*
4. Parmi les 4 courbes tracées, la fonction dérivée de la fonction f est représentée par la courbe **a.**
   La fonction f est croissante sur $]-\infty;-2]$ *et décroissante sur* $[-2;+\infty[$ *; sa dérivée est donc positive sur* $]-\infty;-2]$ *et négative sur* $[-2;+\infty[$, *ce qui correspond à la courbe **a.***

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. **a.** Deux sommets quelconques de ce graphe sont reliés par une chaîne, donc ce graphe est connexe.

   b. Un parcours de graphe est « eulérien » s'il passe une fois et une seule par chaque arête.
   Il s'agit d'un cycle eulérien si on part et on revient au même sommet après avoir parcouru toutes les arêtes.
   Il existe un cycle eulérien dans un graphe, si et seulement si ce graphe ne contient aucun sommet de degré impair ; or ce graphe contient 6 sommets de degré impair : B2 (3), B3 (3), B4 (5), B5 (3), B6 (3) et B7 (3).
   Donc il n'existe pas de parcours permettant de revenir à une balise de départ en passant une et une seule fois par tous les chemins.

   c. Il existe un chemin eulérien joignant deux sommets différents, c'est-à-dire parcourant toutes les arêtes, s'il y a exactement 2 sommets de degré impair.
   Comme il y a 6 sommets de degré impair, il n'y a pas de parcours permettant de relier deux balises différentes en passant une et une seule fois par tous les chemins.

2. On va chercher le plus court chemin allant de B1 à B7 en utilisant l'algorithme de Dijkstra :

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	B1
	21	13	∞	∞	∞	∞	B3 (B1)
	21		21	18	∞	∞	B5 (B3)
	21		~~21~~ 20		∞	33	B4 (B5)
	21				24	33	B2 (B1)
					~~27~~ 24	33	B6 (B4)
						~~33~~ 29	B7 (B6)

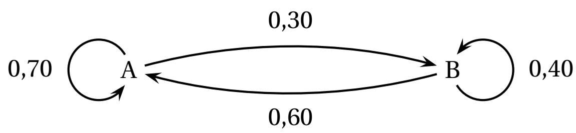
Le trajet le plus rapide reliant B1 à B7 est donc :

$$\text{B1} \xrightarrow{13} \text{B3} \xrightarrow{5} \text{B5} \xrightarrow{2} \text{B4} \xrightarrow{4} \text{B6} \xrightarrow{5} \text{B7}$$

Il a une durée totale de $13+5+2+4+5=29$ minutes.

Partie B

1. Sachant qu'on désigne par A « le licencié est assuré » et par B « le licencié n'est pas assuré » les deux sommets, le graphe probabiliste associé à la situation décrite dans le texte est :



2. D'après le cours, la matrice de transition est $M=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,6 & 0,4\end{pmatrix}$

3. $P_0=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\end{pmatrix}$

$P_1=P_0\times M=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,6 & 0,4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0,8\times 0,7+0,2\times 0,6 & 0,8\times 0,3+0,2\times 0,4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,68 & 0,32\end{pmatrix}$

P_0 correspond à l'année 2012, donc $P_1=\begin{pmatrix}0,68 & 0,32\end{pmatrix}$ correspond à 2013.

En 2013, il y a donc 68 % de licenciés qui ont l'assurance spécifique, et 32 % qui ne l'ont pas.

4. En faisant les calculs à la calculatrice, on peut conjecturer que le pourcentage de licenciés ayant souscrit l'assurance spécifique tend à se rapprocher de 66,67 % ; on va donc chercher un état stable du graphe probabiliste.

L'état stable $\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times M\\ a+b\ \ =1\end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times M \iff \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,6 & 0,4\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l}a=0,7\,a+0,6\,b\\ b=0,3\,a+0,4\,b\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}0=-0,3\,a+0,6\,b\\ 0=0,3\,a-0,6\,b\end{array}\right. \iff 3a-6b=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}3a-6b=0\\ a+b\ \ =1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}3a-6b=0\\ 6a+6b=6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}9a=6\\ b\ \ =1-a\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{2}{3}\\[2mm] b=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Donc on peut conclure que le pourcentage de licenciés ayant souscrit l'assurance spécifique tend en diminuant vers $\dfrac{2}{3} \approx 66,67\,\%$; on peut en déduire que le pourcentage d'assurés reste au dessus de 55 %.
Le club sportif peut donc maintenir son offre à long terme.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** Le pourcentage d'augmentation entre les années 2000 et 2012 est donné par la formule : $\dfrac{68\,500 - 7\,000}{7\,000} \times 100 \approx 878,57$.
Donc le pourcentage d'augmentation entre 2000 et 2012 est approximativement de 879 %.
b. $x^{12} = 9,79 \iff x = \sqrt[12]{9,79} \iff x = 9,79^{\frac{1}{12}} \approx 1,21$
Le taux d'évolution T de la production entre 2000 et 2012 permet de calculer le coefficient multiplicateur $1 + \dfrac{T}{100} = 1 + \dfrac{879}{100} = 9,79$.
Entre 2000 et 2012, il y a 12 années et on vu que $1,21^{12} = 9,79$.
Donc le coefficient par lequel il faudrait multiplier chaque année pendant 12 ans la production pour aboutir à 68 500 tonnes en 2012 est 1,21.
Ce coefficient correspond à un taux d'évolution t tel que $1 + \dfrac{t}{100} = 1,21$ donc $t = 21\,\%$.
Ce taux est généralement appelé « taux d'évolution annuel moyen ».
2. **a.** f est la fonction définie sur $[2\,;\,20]$ par : $f(x) = 27\,131 \ln x + 0,626x^3$.
$f'(x) = 27\,131 \times \dfrac{1}{x} + 0,626 \times 3x^2 = \dfrac{27\,131}{x} + 1,878x^2 > 0$ sur $[2\,;\,20]$
Donc la fonction f est strictement croissante sur $[2\,;\,20]$.
b. L'année 2020 correspond à $x = 20$.
La fonction f est strictement croissante sur $[2\,;\,20]$ donc la plus grande valeur de $f(x)$ sur cet intervalle est $f(20)$.
Or $f(20) \approx 86\,285 < 90\,000$; l'entreprise ne peut donc pas dépasser une production de 90 000 tonnes de papier recyclé avant l'année 2020.
3. **a.** La variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 2$; on cherche $P(X < 496)$.
D'après la calculatrice, $P(X < 496) \approx 0,022\,8$.
La probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans une commande soit refusée est de 0,022 8.
b. On cherche $P(X > 506)$.
D'après la calculatrice, $P(X > 506) \approx 0,001\,3$.
La probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande fasse perdre de l'argent à l'entreprise est 0,001 3.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A
On saisit en entrée le nombre S = 81 200 000.
En faisant tourner l'algorithme proposé, on obtient les résultats suivants :

U	81 751 602	81 571 748	81 392 290	81 213 227	81 034 558
N	0	1	2	3	4
Test U > S	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

Le nombre obtenu en sortie est 4.

Partie B

On note u_n l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier $2011+n$.

1. u_0 désigne la population en 2011, donc $u_0 = 81\,751\,602$.
   On calcule 0,22 % de 81 751 602 : $\dfrac{0,22\times 81\,751\,602}{100} \approx 179\,854$.
   $u_1 = 81\,751\,602 - 179\,844 = 81\,571\,748$
2. **a.** Retirer 0,22 %, c'est multiplier par $1-\dfrac{0,22}{100} = 0,997\,8$; donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 81\,751\,602$ et de raison $q = 0,997\,8$.
   b. D'après le cours, pour tout n, $u_n = u_0\times q^n = 81\,751\,602\times(0,997\,8)^n$.
3. **a.** $2035 = 2011+24$ donc l'année 2035 correspond à $n = 24$.
   D'après la calculatrice, $u_{24} = 81\,751\,602\times(0,997\,8)^{24} \approx 77\,542\,583$ donc la population en 2035 serait de 77 542 583 habitants.
   b. D'après la partie **A**, $u_3 = 81\,213\,227$ et $u_4 = 81\,034\,558$; donc la population est en dessous de 81 200 000 à partir de $n = 4$ donc à partir de l'année $2011+4$ soit 2015.

Partie C

1. D'après le texte, on peut dire que pour tout n, $v_{n+1} = 0,997\,8\,v_n + 49\,800$.
   De plus, $v_0 = u_0 + 49\,800 = 81\,751\,602 + 49\,800 = 81\,801\,402$
2. $v_1 = 0,997\,8\,v_0 + 49\,800 = 0,997\,8\times 81\,801\,402 + 49\,800 \approx 81\,671\,239$
   $v_2 = 0,997\,8\,v_1 + 49\,800 = 0,997\,8\times 81\,671\,239 + 49\,800 \approx 81\,541\,362$
   La population de l'Allemagne semble encore diminuer malgré le flux migratoire positif de 49 800 personnes chaque année.