Corrigé du baccalauréat ES Polynésie septembre 2008

EXERCICE 1 **3 points**

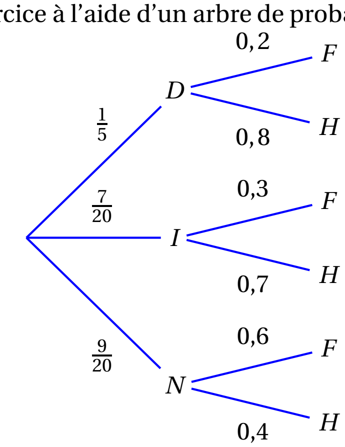
Commun à tous les candidats.

1. $e^{-2\ln 3} = \dfrac{1}{e^{2\ln 3}} = \dfrac{1}{e^{\ln 3^2}} = \dfrac{1}{9}$.
2. $e^{3x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{3x} \geqslant 1 \iff 3x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$.
3. On a $(x\ln x)' = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.
4. Le prix H. T. est égal à $\dfrac{299}{1,196} = 250$.
5. On a donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
   Et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,2 - 0,6 \times 0,2 = 0,8 - 0,12 = 0,68$.
6. On a $U_8 = U_0 \times q^8 \iff 32 = 2q^8 \iff q^8 = 16 \iff q = 16^{\frac{1}{8}} = \sqrt{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Traduire les données de l'exercice à l'aide d'un arbre de probabilité.



2. **a.** On a $p(F \cap D) = p(D \cap F) = p(D) \times p_D(F) = \frac{1}{5} \times 0,2 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 0,04$.

   b. On a de même :
   $p(I \cap F) == p(I) \times p_I(F) = \frac{7}{20} \times 0,3 = \frac{2,1}{20} = \frac{10,5}{100} = 0,105$.

   c. On calcule enfin :
   $p(N \cap F) = p(N) \times p_N(F) = \frac{9}{20} \times 0,6 = \frac{5,4}{20} = \frac{2,7}{10} = 0,27$.
   D'après la loi des probabilités totales : $p(F) = p(F \cap D) + p(I \cap F) + p(N \cap F) =$
   $0,04 + 0,105 + 0,27 = 0,415$.
3. $p_F(D) = \dfrac{p(F \cap D)}{p(F)} = \dfrac{0,04}{0,415} \approx 0,0963 \approx 0,096$.
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes interrogées lectrice du *Nénuphar*. Cette variable suit une loi binomiale avec $n = 3$ et $p = p(N) = 0,105$.
   La probabilité qu'aucun des trois abonnés ne soit une femme lectrice du Nénuphar est égale à $(1 - 0,105)^3 \approx 0,7169 \approx 0,717$ au millième près.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

1. $U_0 = 14\,000$, $U_1 = 1,04 \times 14\,000 + 200 = 14\,760$, $U_2 = 1,04 \times 14\,760 + 200 = 155\,550,4$.
2. **a.** $V_0 = U_0 + 5\,000 = 14\,000 + 5\,000 = 19\,000$.

   b. $V_{n+1} = U_{n+1} + 5\,000 = 1,04U_n + 200 + 5\,000 = 1,04U_n + 5\,200 = 1,04\left(U_n + \dfrac{5\,200}{1,04}\right) =$ $1,04\,(U_n + 5\,000) = 1,04V_n$. Cette égalité $V_{n+1} = 1,04V_n$ montre que la suite (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = 19\,000$ et de raison $1,04$.

   c. On sait qu'alors pour tout naturel n, $V_n = V_0 \times 1,04^n$, soit $V_n = 19\,000 \times 1,04^n$.

   d. Comme $V_n = U_n + 5\,000$, bon a donc $U_n = V_n - 5\,000 = 19\,000 \times 1,04^n - 5\,000$.

Partie B

1. 2010 représente le rang $n = 8$, donc $U_8 = 19\,000 \times 1,04^8 - 5\,000 \approx 21\,002,70 \approx 22\,003$ (€).
2. **a.** $1,04^x \geqslant \dfrac{33}{19} \iff x \ln 1,04 \geqslant \ln\left(\dfrac{33}{19}\right) \iff x \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{33}{19}\right)}{\ln 1,04}$.

   Les solutions sont les réels de l'intervalle $\left[\dfrac{\ln\left(\frac{33}{19}\right)}{\ln 1,04}\ ;\ +\infty\right[$.

   b. En 2002, le salaire était de $U_0 = 14\,000$; il aura donc doublé lorsque :
   $U_n \geqslant 2 \times 14\,000 \iff 19\,000 \times 1,04^n - 5\,000 \geqslant 28\,000 \iff 190001,04^n \geqslant 33\,000$
   $\iff 1,04^n \geqslant \dfrac{33\,000}{19\,000} \iff 1,04^n \geqslant \dfrac{33}{19}$.
   On est donc amené à résoudre l'inéquation de la question précédente avec $x = n$.
   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{33}{19}\right)}{\ln 1,04} \approx 14,07$. Le plus petit entier x qui vérifie l'inéquation est donc $x = 15 = n$.
   Le salaire doublera en 2017.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats.

Partie A

1. $f(0) = \mathrm{e}^{0-1} + 0 - 1 = \mathrm{e}^{-1} - 1$;
   $\mathrm{e}^{1-1} + 1 - 1 = \mathrm{e}^0 = 1$.
2. **a.** $f(x) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} + x - 1$.
   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} = 0$.
   D'autre part $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1) = -\infty$, d'où par somme de limites :
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

   b. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $d(x) = f(x) - (x - 1) = \mathrm{e}^{x-1}$.
   On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ soit $\lim\limits_{x \to -\infty} d(x) = 0$, ce qui signifie que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

3. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^x \times \text{e}^{-1} = +\infty$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ par somme de limites :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

1. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = 1 \times \text{e}^{x-1} + 1 = 1 + \text{e}^{x-1} > 0$ car somme de deux termes supérieurs à zéro.

b. $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement crissante sur $\mathbb{R}$ de moins l'infini à plus l'infini.

2. **a.** D'après le résultat précédent f est strictement croissante de $f(0) = -\text{e}^{-1} - 1 < 0$ à $f(1) = 1 > 0$; comme elle est continue car dérivable sur $[0\,;\,1]$, il existe d'après le théorème de la valeur intermédiaire un réel unique α de $[0\,;\,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne :

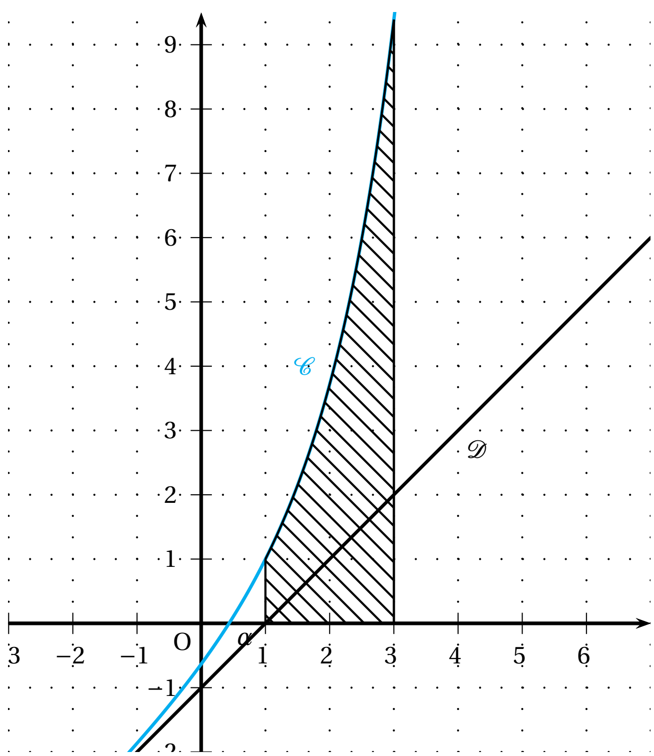
$f(0,4) \approx -0,005$ et $f(0,5) \approx 0,1$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$;

$f(0,43) \approx -0,005$ et $f(0,44) \approx 0,01$, donc $0,43 < \alpha < 0,44$.

c. On a donc :

- sur $]-\infty\,;\,\alpha[$, $f(x) < 0$;
- $f(\alpha) = 0$;
- sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$.

3.



Partie C

1. Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{x-1}$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^{x-1}$; une primitive de $x \longmapsto x-1$ est $x \longmapsto \frac{x^2}{2} - x$, donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

   $x \longmapsto F(x) = \mathrm{e}^{x-1} + \dfrac{x^2}{2} - x.$

2. $I = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1) = \mathrm{e}^{3-1} + \frac{3^2}{2} - 3 - \left[\mathrm{e}^{1-1} + \frac{1^2}{2} - 1\right] = \mathrm{e}^2 + \frac{9}{2} - 3 - 1 - \frac{1^2}{2} + 1 = \frac{3}{2} + \mathrm{e}^2 \approx 8,89$. On a vu que pour $x > \alpha$, donc pour $x > 1$, $f(x) > 0$. Donc sur l'intervalle $[1 ; 3]$, la fonction f est positive. Donc l'intégrale précédente est égale (en unité d'aire) à la mesure de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

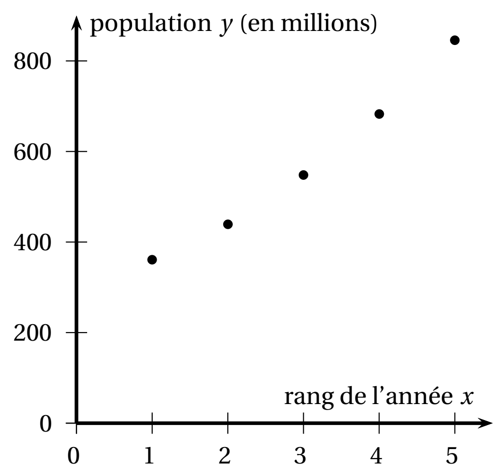
   On peut vérifier ce résultat sur la figure en comptant le nombre de cadeaux contenus dans la surface hachurée.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats.

année	1951	1961	1971	1981	1991
Rang x_i	1	2	3	4	5
Population y_i (en millions)	361	439	548	683	846
z_i	5,889	6,084	6,306	6,526	6,741

1.



2. **a.** La calculatrice donne après arrondi des coefficients au dixième : $y = 121,4x + 211,2$.

   b. 2001 correspond au rang $x = 6$, ce qui donne une prévision de $y = 121,4 \times 6 + 211,2 = 939,6$ soit environ 940 millions d'habitants.

3. **a.**

   b. La calculatrice donne après arrondi des coefficients au millième : $z = 0,215x + 5,665$.

   c. On a $z = \ln y = 0,215x + 5,665 \iff y = \mathrm{e}^{0,215x+5,665} \iff y = \mathrm{e}^{5,665} \times \mathrm{e}^{0,215x}$.
   Or $\mathrm{e}^{5,665} \approx 288,6$ soit à l'unité près 289. Finalement
   $y \approx 289\mathrm{e}^{0,215x}$.

   d. 2001 correspond au rang $x = 6$, ce qui donne une prévision de $y = \approx 289\mathrm{e}^{0,215\times 6} \approx 1\,050$.

4. L'estimation par le modèle exponentiel est le plus réaliste, donc en prenant celui-ci pour 2011, rang $x = 7$, on obtient une prévision pour 2011 de :
   $y \approx 289\mathrm{e}^{0,215\times 7} \approx 1\,302$.