Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2010

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** Voir à la fin.
   b. Une équation de la tangente au point d'abscisse 6 est $y - f(6) = f'(6)(x-6) \iff y - 3 = 2(x-6) \iff y = 2x - 12 + 3 \iff y = 2x - 9$.
   c. Voir à la fin.
2. **a.** La fonction exponentielle étant croissante sur $[0\,;\,6]$, la fonction composée g a les mêmes variations que la fonction f, soit décroissante sur $[0\,;\,4]$ puis croissante sur $[4\,;\,6]$
   Voir les variations à la fin.
   On a $g(0) = \mathrm{e}^{f(0)} = \mathrm{e}^5$; $g(4) = \mathrm{e}^{f(4)} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$; $g(6) = \mathrm{e}^{f(6)} = \mathrm{e}^3$.
   b. On a $g'(x) = f'(x) \times \mathrm{e}^{f(x)} = f'(x) \times g(x)$, d'où $g'(0) = f'(0) \times g(0) = -3 \times \mathrm{e}^5 = -3\mathrm{e}^5$.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Étude en pourcentages

1. Voir à la fin.
2. **a.** La calculatrice donne $y = 0,28x + 8,24$
   b. Voir à la fin.
3. 2010 correspond au rang 6; on aura donc une part de $0,28 \times 6 + 8,24 = 1,68 + 8,24 = 9,92$ %.

Partie B : Étude en valeurs

1. On a $140 \times \dfrac{8,3}{100} = 1,4 \times 8,3 = 11,62$ milliards versés par les ménages en 2004.
2. **a.** La dépense en 2010 sera de $170,5 \times 1,03 \times 1,03 = \approx 180,88$ soit 181 milliards au milliard près.
   b. On a vu que la part des ménages en 2010 pouvait être estimée à 9,92 % des 180,88 milliards soit $180,88 \times 0,0992 \approx 17,9$ milliards soit environ 18 milliards d'euros payés par les ménages en 2010.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

A - Observation d'une suite de nombres

1. Il semble que la limite de la suite (u_n) soit voisine de 20.
2. On a $\dfrac{104,6}{161} \approx 0,649$;
   $\dfrac{70,76}{104,6} \approx 0,676$;
   $\dfrac{50,456}{70,76} \approx 0,713$: il n'existe pas de réel q tel que $u_{n+1} = q \times u_n$: la suite n'est pas géométrique.

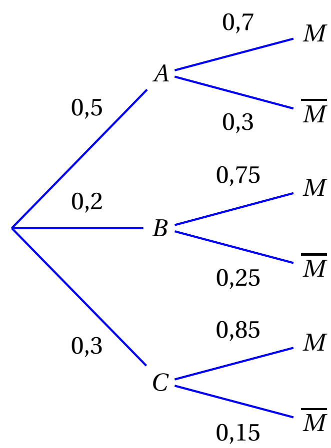
B - Étude de la suite

1. On a $u_1 = 0,6 \times 161 + 8 = 96,6 + 8 = 104,6$ et de même $u_2 = 70,76$, $u_3 = 50,456$.
   Donc $u_4 = 0,6 \times 50,456 + 8 = 38,2736$.
2. Pour tout entier naturel n, on a :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0,6u_n + 8 - 20 = 0,6u_n - 12 = 0,6(u_n - 20) = 0,6v_n$.
   L'égalité $v_{n+1} = 0,6v_n$ vraie pour tout entier n montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,6, de premier terme $v_0 = u_0 - 20 = 161 - 20 = 141$.
3. On sait qu'alors pour tout entier n, on a $v_n = 141 \times 0,6^n$.
   Or $v_n = u_n - 20 \iff u_n = v_n + 20 = 141 \times 0,6^n + 20$.
4. Comme $0 < 0,6 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} 0,6^n = 0$, donc :
   $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 20$. La conjecture faite dans la partie A est vraie.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1.



2. Il faut trouver $p(C \cap M) = p(C) \times p_C(M) = 0,3 \times 0,85 = 0,255$.
3. On a de même :
   $p(A \cap M) = p(A) \times p_A(M) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$;
   $p(B \cap M) = p(\text{B}) \times p_B(M) = 0,2 \times 0,75 = 0,15$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(M) = p(A \cap M) + p(A \cap M) + p(C \cap M) = 0,35 + 0,15 + 0,255 = 0,755$.
4. On a $p_{\overline{M}}(B) = \dfrac{p\left(\overline{M} \cap B\right)}{p\left(\overline{M}\right)}$.
   Or $p\left(\overline{M}\right) = 1 - p(M) = 1 - 0,755 = 0,245$.
   D'autre part $p\left(B \cap \overline{M}\right) = p(B) - p(B \cap M) = 0,2 - 0,15 = 0,05$.
   Donc $p_{\overline{M}}(B) = \dfrac{0,05}{0,245} \approx 0,2040$ soit 0,204 au millième près.
5. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = p(C) = 0,3$.
   La probabilité qu'exactement trois de ces étudiants soient du profil C est égale à :
   $4 \times 0,3^3 \times (1 - 0,3) = 3 \times 0,3^3 \times 0,7 = 0,0756$ soit 0,076 au millième près.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La fonction g est dérivable sur $[1~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, car $x \geqslant 1 > 0$. La fonction g est donc croissante sur $[1~;~+\infty[$ de $g(1) = -\dfrac{1}{2}$ à plus l'infini puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

2. Dans $[1~;~+\infty[$, $g(x) = 0 \iff \ln x - \dfrac{1}{2} = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ (ou $\sqrt{\mathrm{e}}$). Donc $S = \left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right\}$.

3. Puisque $g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 0$ et que la fonction est croissante sur $\left[\sqrt{\mathrm{e}}~;~+\infty\right[$, $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{\mathrm{e}}$.

Partie B

1. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln x - 1) = +\infty$ par produit des limites :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. Sur $[1~;~+\infty[$, on a :
$f'(x) = 2 \times 2x(\ln x - 1) + 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 4x\ln x - 4x + 2x = 4x\ln x - 2x = 4x\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) = 4xg(x)$.

b. Comme sur $[1~;~+\infty[$, $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ vu dans la partie A.
Donc $f'(x) < 0$ sur $\left[1~;~\sqrt{\mathrm{e}}\right[$;
$f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 0$;
$f'(x) > 0$ sur $\left]\sqrt{\mathrm{e}}~;~+\infty\right[$.
f est donc décroissante sur $\left[1~;~\sqrt{\mathrm{e}}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{\mathrm{e}}~;~+\infty\right[$.
Elle a donc un minimum $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 2\mathrm{e}\left(\ln\sqrt{\mathrm{e}} - 1\right) + 2 = 2\mathrm{e}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2 = 2 - \mathrm{e}$.

3. a. On a $f(2) = 8(\ln 2 - 1) + 2 = 8\ln 2 - 6 \approx -0,45$: $f(3) = 18(\ln 3 - 1) + 2 = 18\ln 3 - 16 \approx 3,78$.
Donc sur l'intervalle $[2~;3]$, f est continue car dérivable, strictement croissante d'une valeur inférieure à zéro à une valeur supérieure à zéro; d'après le théorème de la valeur intermédiaire elle s'annule donc pour une unique valeur $\alpha \in [2~;~3]$.

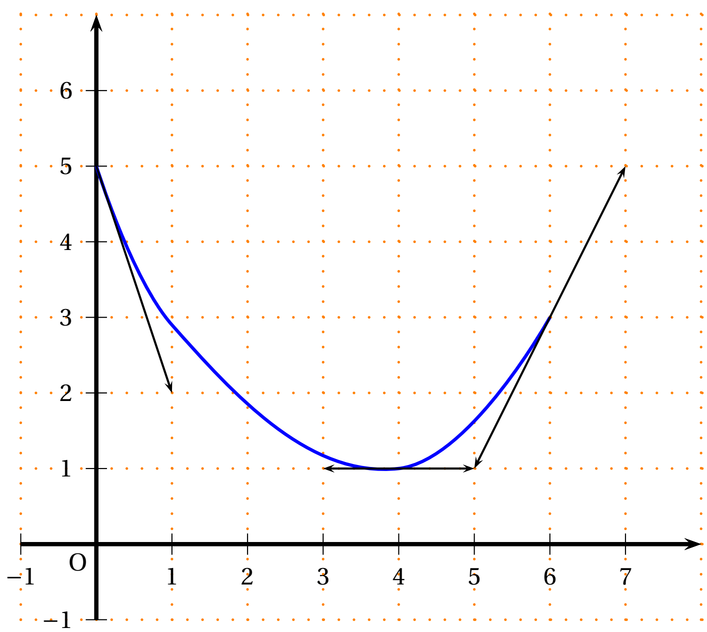
b. La calculatrice donne :
$f(2,2) \approx -0,1$ et $f(2,3) \approx 0,2$, donc $2,2 < \alpha < 2,3$;
$f(2,21) \approx -0,02$ et $f(2,22) \approx 0,004$; donc $2,21 < \alpha < 2,22$.

Annexes – à rendre avec la copie

Annexe 1

x	0		4		6
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	5	↘	1	↗	3

Annexe 2



Annexe 3

x	0		4		6
variations de g	e^5	↘	e	↗	e^3

Exercice 2

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité