Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

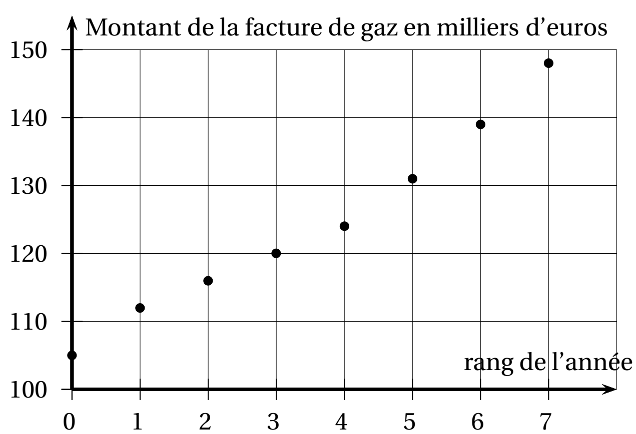
Commun à tous les candidats

1. VRAI : sur $]-1\,;\,+\infty[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 5$.
2. VRAI : sur l'intervalle la fonction est croissante.
3. FAUX : on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. La droite dont une équation est $y = 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
4. FAUX.
5. Sur l'intervalle $g(x) > 0$, donc la fonction f est bien définie.
   a. VRAI : la fonction ln est croissante et la fonction g est décroissante, donc par composition la fonction f est décroissante de $\ln 5$ à $\ln 1 = 0$
   b. VRAI : déjà vu.
   c. FAUX : par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 1 = 0$.
   d. VRAI : limite de la fonction ln en 0.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Voir à la fin de l'exercice.
2. On utilise un ajustement affine comme premier modèle.
   a. La calculatrice donne après arrondi des coefficients au dixième : $y = 5,8x + 104,2$.
   b. 2012 correspond au rang $x = 12$, d'où une facture de $y = 5,8 \times 12 + 104,2 = 69,6 + 104,2 = 173,8 \approx 174$ au millier d'euros près.
3. L'augmentation est en pourcentage le nombre p tel que :
   $105 \times p^7 = 148 \iff p^7 = \dfrac{148}{105} \iff p = \left(\dfrac{148}{105}\right)^{\frac{1}{7}}$ soit $p \approx 1,05$ soit une augmentation annuelle moyenne de 5 %.
4. **a.** $u_1 = 1,05u_0 = 1,05 \times 148 = 155,4$.
   b. D'une année à l'année suivante le montant est multiplié par le même nombre 1,05 : la suite est donc géométrique de premier terme $u_0 = 148$ et de raison $r = 1,05$.
   c. On sait qu'alors pour tout naturel n, $u_n = u_0 \times r^n = 148 \times 1,05^n$.
   d. 2012 correspond ici au rang 5, donc $u_5 = 148 \times 1,05^5 \approx 188,89 \approx 189$ milliers d'euros au millier près.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $u_2 = u_1 \times 1,05 + 20 = 100 \times 1,05 + 20 = 125$ €.

   b. Si un jour on verse u_n le lendemain on verse 5 % de plus soit $1,05u_n$ plus 20 € soit $u_{n+1} = 1,05u_n + 20$.

2. **a.** $v_1 = u_1 + 400 = 100 + 400 = 500$.

   b. $v_{n+1} = u_{n+1} + 400 = 1,05u_n + 20 + 400 = 1,05u_n + 420 = 1,05\left(u_n + \frac{420}{1,05}\right) = 1,05(u_n + 400) = 1,05v_n$.

   L'égalité, vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 1,05v_n$, montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,05, de premier terme $v_1 = 500$.

   c. On sait que $v_n = 1,05^{n-1}v_1 = 500 \times 1,05^{n-1}$.

   Or $v_n = u_n + 400 \iff u_n = v_n - 400 = 500 \times 1,05^{n-1} - 400$

   d. $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 500 + 500 \times 1,05^{2-1} + 500 \times 1,05^{3-1} + \cdots + 500 \times 1,05^{n-1} = 500 \times \dfrac{1 - 1,05^n}{1 - 1,05} = \dfrac{500}{-0,05}(1 - 1,05^n) = -10000(1 - 1,05^n) = 10000(1,05^n - 1)$.

3. Au bout de n jours Marc aura reçu :

   $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = v_1 - 400 + v_2 - 400 + \cdots v_n - 400 = v_1 + v_2 + \cdots + v_n - 400n = 10000(1,05^n - 1) - 400n$.

   Il faut donc trouver le plus petit entier n tel que :

   $10000(1,05^n - 1) - 400n \geqslant 10000 \iff 1,05^n - 1 - 0,04n \geqslant 1 \iff 1,05^n \geqslant 2 + 0,04n$.

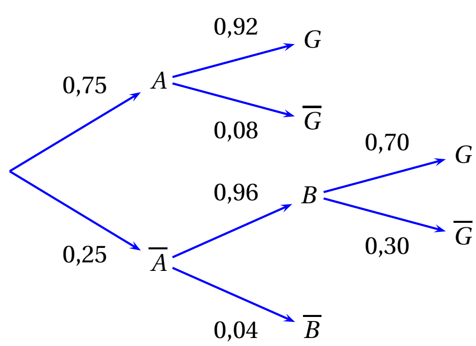
   La calculatrice donne $1,05^{21} \approx 2,786$ et $2 + 0,04 \times 21 = 2,84 > 2,786$;

   $1,05^{22} \approx 2,925$ et $2 + 0,04 \times 22 = 2,88 < 2,925$.

   La somme reçue dépassera 10 000 €au bout de 22 jours.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats



1. Voir ci-dessus.

2. On a $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,25 \times 0,04 = 0,01$.

3. Il faut trouver :

   $p\left(\overline{A} \cap B \cap G\right) = p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) \times p_B(G) = 0,25 \times 0,96 \times 0,70 = 0,24 \times 0,7 = 0,168$.

4. D'après la loi des probabilités totales :

   $p(G) = p(A \cap G) + p\left(\overline{A} \cap B \cap G\right)$.

   Or $p(A \cap G) = p(A) \times p_A(G) = 0,75 \times 0,95 = 0,7125$.

   Donc $p(G) = 0,69 + 0,168 = 0,858$.

5. On a $p_G(A) = \dfrac{p(G \cap A)}{p(G)} = \dfrac{0,69}{0,858} \approx 0,804.$

6. La probabilité est celle de perdre au moins un point. La variable égale au nombre de point(s) gagné(s) est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,858$.

La probabilité de gagner les quatre points est :

$0,858^4$, donc celle de perdre au moins un point est :

$1 - 0,858^4 \approx 0,458\,063 \approx 0,458$ au millième près.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle $[1 ; 15]$ par :

$$B(x) = (x-5)\mathrm{e}^{u(x)} + 2 \quad \text{avec} \quad u(x) = -0,02x^2 + 0,2x - 0,5.$$

Si $B(x)$ est positif il s'agit d'un bénéfice, s'il est négatif il s'agit d'une perte.

1. a. u est dérivable sur $[1 ; 15]$ et sur cet intervalle :

$u'(x) = -2 \times 0,02x + 0,2 = 0,2 - 0,04x$.

De même sur $[1 ; 15]$, B est dérivable et :

$B'(x) = 1\mathrm{e}^{u(x)} + u'(x) \times (x-5)\mathrm{e}^{u(x)} =$

$\mathrm{e}^{u(x)}(1 + u'(x)(x-5)) = \mathrm{e}^{u(x)}[1 + (0,2 - 0,04x)(x-5)] = \mathrm{e}^{u(x)}\left(1 + 0,2x - 1 - 0,04x^2 + 0,2x\right) =$

$\mathrm{e}^{u(x)}\left(-0,04x^2 + 0,4x\right)$.

b. Comme $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $B'(x)$ est celui de $0,4x - 0,04x^2 = 0,04x(10-x)$. D'où :

- Si $x < 10$, $B'(x) > 0$: la fonction est croissante sur $[1 ; 10]$ de $B(1) = -5\mathrm{e}^{u(1)} + 2 = -5\mathrm{e}^{-0,32} + 2 \approx -0,905$ à $B(10)$;
- Si $x > 10$, $B'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur $[10 ; 15]$ de $B(10)$ à $B(15) = 10\mathrm{e}^{u(15)} + 2 = 10\mathrm{e}^{-2} \approx 3,35$;
- Si $x = 10$, $B'(x) = 0$: $B(10) = 5\mathrm{e}^{u(10)} = 5\mathrm{e}^{-2+2-0,5} + 2 = 5\mathrm{e}^{-0,5} + 2 \approx 5,03$ est le maximum de B sur $[1 ; 15]$;

2. Sur l'intervalle $[0 ; 10]$, la fonction B est continue car dérivable strictement croissante d'une valeur $B(0) < 0$ à $B(10) > 0$: d'après le théorème de la valeur intermédiaire il existe une valeur unique $\alpha \in [0 ; 10]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$B(2) \approx -0,5$ et $B(3) \approx 1,2$, donc $2 < \alpha < 3$;

$B(2,7) \approx -0,07$ et $B(2,8) \approx 0,003$, donc $2,7 < \alpha < 2,8$;

$B(2,79) \approx -0,004$ et $B(2,80) \approx 0,003$, donc $2,79 < \alpha < 2,80$.

x étant en centaines le nombre minimal d'objets à produire pour réaliser un bénéfice est donc de 280. On a vu que le maximum de B est obtenu pour $x = 10$ soit la production de 1 000 pièces. Ce bénéfice maximum est $B(10) \approx 5,033$ soit 5 033 €.

3. a. On a :

$-25 \times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} + 2 = -25(0,2 - 0,04x)\mathrm{e}^{u(x)} + 2 = (-0,5 + x)\mathrm{e}^{u(x)} + 2 = (x - 0,5)\mathrm{e}^{u(x)} + 2 = B(x)$

b. D'après le résultat précédent, une primitive de $B(x)$ est la fonction définie sur $[1 ; 15]$ par $x \longmapsto A(x) = -25\mathrm{e}^{u(x)} + 2x$.

Donc $m = \dfrac{1}{15-1}\displaystyle\int_0^{15} B(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{14}[A(t)]_1^{15} = \dfrac{1}{15}[A(15) - A(1)] =$

$\dfrac{1}{15}\left[-25\mathrm{e}^{u(15)} + 2 \times 15 - \left(-25\mathrm{e}^{u(1)} + 2 \times 1\right)\right] =$

$\dfrac{1}{14}\left(2-25\mathrm{e}^{-0,5}+25\mathrm{e}^{-0,32}-2\right)=\dfrac{1}{14}\left(28-25\mathrm{e}^{-2}+25\mathrm{e}^{-0,32}\right)\approx 3,055.$

c. Le bénéfice étant en milliers d'euros le résultat précédent signifie qu'en moyenne le bénéfice de la société sera de 3 055 €.