Corrigé du baccalauréat Terminale ES/L Polynésie
4 septembre 2018

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Affirmation A

Un objet subit trois augmentations successives de 10 %. Une baisse de 25 % suffit à ramener le prix de cet objet en dessous de son prix initial.

> Augmenter de 10 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{10}{100}=1{,}10$; donc trois augmentations successives de 10 % correspondent à une multiplication par $1{,}10^3=1{,}331$.
>
> Baisser de 25 %, c'est multiplier par $1-\dfrac{25}{100}=0{,}75$.
> Augmenter successivement trois fois de 10 % puis baisser de 26 % c'est multiplier par $1{,}331\times 0{,}75=0{,}998\,25$; ce coefficient est inférieur à 1 donc il correspond à une baisse par rapport au prix initial.
> **Affirmation A vraie**

Affirmation B

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 passe par le point de coordonnées $(2\,;\,3)$.

> La tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse a a pour équation
> $y=f'(a)\,(x-a)+f(a)$.
> $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+2$ donc $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$
> Donc $f(1)=0-\dfrac{1}{1}+2=1$ et $f'(1)=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}=2$.
> La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y=2\,(x-1)+1$ c'est-à-dire $y=2x-1$.
> Si $x=2$ alors $y=2\times 2-1=3$ donc la tangente passe par le point de coordonnées $(2\,;\,3)$.
> **Affirmation B vraie**

Affirmation C

La valeur exacte de la somme des 12 premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 4 et de raison $\dfrac{1}{3}$ est : $6\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{13}\right]$.

> La somme des premiers termes d'une suite géométrique est donnée par
> $S=\text{premier terme}\times\dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$.
>
> La somme des 12 premiers termes de (u_n) est donc $S=4\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{12}}{1-\frac{1}{3}}=6\times\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{12}\right]$.
>
> **Affirmation C fausse**

Affirmation D

Dans un hôtel, le petit déjeuner n'est servi que jusqu'à 10 heures 15 minutes. Pierre, qui réside dans cet hôtel, se lève entre 9 heures et 11 heures.

On admet que l'heure de lever de Pierre est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [9 ; 11]. La probabilité que Pierre ne puisse pas prendre son petit déjeuner est 0,425.

> Soit T la variable aléatoire qui donne l'heure du lever de Pierre. Pour que Pierre ne puisse pas prendre son petit déjeuner, il faut qu'il se lève entre 10h15 (soit 10,25 h) et 11 heures.
>
> $P\left(T \in [10{,}25\,;\,11]\right). = \dfrac{11-10{,}25}{11-9} = 0{,}375.$
>
> **Affirmation D fausse**

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

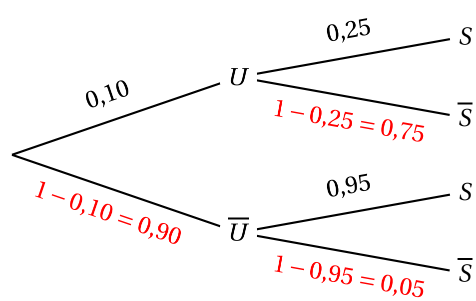
Partie A

Une étude portant sur la recharge des véhicules électriques indique que 10 % des recharges sont effectuées sur des bornes publiques. Dans les autres cas, la recharge s'effectue chez des particuliers.

Il existe deux types de recharge : la recharge « standard » et la recharge « accélérée ».
Les recharges « standard » représentent 25 % des recharges effectuées sur des bornes publiques et 95 % des recharges effectuées chez les particuliers.
On choisit au hasard un véhicule électrique qui vient d'être rechargé et on considère les évènements suivants :

- U : « la recharge a été effectuée sur une borne publique » ;
- S : « la recharge a été effectuée de façon standard ».

1. On complète l'arbre de probabilités.



2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(S) = P(U \cap S) + P\left(\overline{U} \cap S\right) = P(U) \times P_U(S) + P(\overline{U}) \times P_{\overline{U}}(S) = 0{,}10 \times 0{,}25 + 0{,}90 \times 0{,}95 = 0{,}88$
3. Sachant que le véhicule choisi a été rechargé de façon standard, la probabilité que la recharge ait été effectuée sur une borne publique est
$P_S(U) = \dfrac{P(S \cap U)}{P(U)} = \dfrac{0{,}10 \times 0{,}25}{0{,}88} = \dfrac{0{,}025}{0{,}88} \approx 0{,}028.$

Partie B

Une société fabriquant des batteries pour véhicules électriques effectue une charge complète de chacune de ses batteries lors de la fabrication. Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de charge de ces batteries, exprimée en heures, par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne 6 et d'écart type σ.

1. On sait qu'environ 95 % des durées de charge sont comprises entre 2,6 h et 9,4 h.
   Cela signifie que $P(2{,}6 \leqslant T \leqslant 9{,}4) \approx 0{,}95$.
   Or $2{,}6 = 6-3{,}4$ et $9{,}4 = 6+3{,}4$, et $\mu = 6$ donc $P(\mu-3{,}4 \leqslant T \leqslant \mu+3{,}4) \approx 0{,}95$.
   D'après le cours, on sait que si T suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, on a $P(\mu-2\sigma \leqslant T \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}95$.
   Donc on peut déduire que $2\sigma \approx 3{,}4$ donc prendre 1,7 pour valeur de σ.
2. **a.** À la calculatrice, on trouve $P(T > 7) \approx 0{,}278$.

   b. Sachant que l'une des batteries mise en charge n'est pas rechargée complètement au bout de 7 heures, la probabilité qu'elle ne le soit toujours pas au bout de 9 heures est :
   $P_{T>7}(T>9) = \dfrac{P\big((T>9)\cap(T>7)\big)}{P(T>7)} = \dfrac{P(T>9)}{P(T>7)}$.
   À la calculatrice on trouve $P(T>9) \approx 0{,}039$ donc $P_{T>7}(T>9) \approx \dfrac{0{,}039}{0{,}278} \approx 0{,}140$.

Partie C

Le fabriquant de batteries affirme que 80 % de ses batteries peuvent assurer 350 cycles de rechargement complet sans perte significative de puissance.
Une association de consommateurs réalise une enquête sur 57 batteries de cette marque.
Parmi celles-ci, seules 40 n'ont pas subi de perte de puissance significative.
On va tester l'hypothèse du fabriquant ($p = 0{,}8$) sur un échantillon de 57 batteries.
$n = 57 \geqslant 30$, $np = 45{,}6 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 11{,}4$ donc on peut établir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de batteries qui n'ont pas subi de perte de puissance significative :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}8 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\,(1-0{,}8)}}{\sqrt{57}}\,;\, 0{,}8 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\,(1-0{,}8)}}{\sqrt{57}}\right]$$
$$\approx [0{,}696\,;\, 0{,}904]$$

La fréquence dans l'échantillon test est $f = \dfrac{40}{57} \approx 0{,}702$.
$f \in I$ donc il n'y a pas de raison de remettre en cause l'affirmation du fabriquant, au risque de 5 % de se tromper.

Exercice 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Au 1er janvier 2018, madame DURAND dispose d'un capital de 16 000 €. Le 1er juillet de chaque année, elle prélève 15 % du capital disponible en prévision de ses vacances estivales.

Partie A

On modélise le montant du capital de madame DURAND au 1er janvier par une suite (u_n). Plus précisément, si n est un entier naturel, u_n désigne le montant du capital de madame DURAND disponible le 1er janvier de l'année $2018 + n$. On a donc $u_0 = 16000$.

1. Retirer 15 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{15}{100}$ soit 0,85.
   $u_1 = 0{,}85u_0 = 0{,}8 \times 16000 = 13600$ et $u_2 = 0{,}85u_1 = 0{,}85 \times 13600 = 11560$
2. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $u_0 = 16000$ donc, pour tout n, on a $u_n = u_0 \times q^n = 16000 \times 0{,}85^n$.
3. **a.** La suite (u_n) est géométrique de raison 0,85; or $0 < 0{,}85 < 1$ donc la suite (u_n) converge vers 0.

b. Cela signifie que le capital de madame Durand va s'épuiser.

4. À l'aide d'un algorithme, madame DURAND souhaite déterminer le nombre d'années à partir duquel son capital devient inférieur ou égal à 2 000 €.

a. On complète l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le résultat attendu.

```
U ← 16000
N ← 0
Tant que U > 2000
    N ← N + 1
    U ← 0,85 × U
Fin Tant que
```

b. La valeur numérique n contenue dans la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme est le plus petit entier solution de l'inéquation $u_n \leqslant 2000$.
On résout cette inéquation.

$$u_n \leqslant 2000 \iff 16000 \times 0{,}85^n \leqslant 2000 \iff 0{,}85^n \leqslant \frac{2}{16} \iff \ln\left(0{,}85^n\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$
$$\iff n \times \ln(0{,}85) \leqslant \ln\left(\frac{1}{8}\right) \iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{\ln(0{,}85)}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{\ln(0{,}85)} \approx 12{,}8$ donc la valeur affichée en fin d'algorithme est 13.

Partie B

Cherchant à anticiper la diminution de son capital disponible, madame DURAND décide d'ajouter à son capital disponible 300 € chaque 1er décembre.
On note v_n la valeur du capital le 1er janvier de l'année $2018+n$. On a ainsi $v_0 = 16000$.

1. On passe de v_n à v_{n+1} en retirant 15 %, donc en multipliant par 0,85, puis en ajoutant 300; donc, pour tout n, $v_{n+1} = 0{,}85 v_n + 300$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 2000$; on en déduit que pour tout n, $v_n = w_n + 2000$.

a. $w_0 = v_0 - 2000 = 16000 - 2000 = 14000$

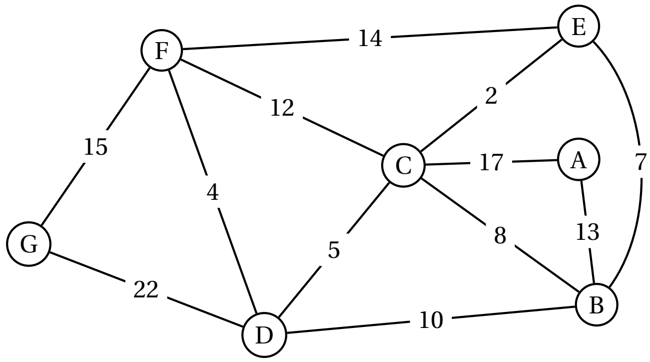
b. $w_{n+1} = v_{n+1} - 2000 = 0{,}85 v_n + 300 - 2000 = 0{,}85\left(w_n + 2000\right) - 1700$
$= 0{,}85 w_n + 1700 - 1700 = 0{,}85 w_n$
Donc la suite (w_n) est géométrique de raison 0,85.

c. La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $w_0 = 14000$ donc, pour tout n, $w_n = 14000 \times 0{,}85^n$.
Comme $v_n = w_n + 2000$, on déduit que pour tout n, $v_n = 2000 + 14000 \times 0{,}85^n$.

3. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2000$. Donc, au bout d'un certain nombre d'années, v_n sera inférieur à 2500; madame Durand a donc tort.
Remarque
À la calculatrice on trouve $v_{20} \approx 2542{,}63 > 2500$ et $v_{21} \approx 2461{,}24 < 2500$.

Exercice 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

En vacances, Assan et Chloé projettent de visiter sept sites touristiques et se sont procurés le plan des sentiers reliant ces sites.
Ci-dessous, ils ont représenté ce plan par un graphe connexe pondéré par les temps de parcours en minutes séparant les lieux de visites notés A, B, C, D, E, F et G.



Partie A

1. On détermine le degré de chacun des sommets du graphe :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	5	4	3	4	2

Il y a exactement deux sommets de degrés impairs, C et E, donc, d'après le théorème d'Euler, il existe des trajets qui passent une fois et une seule par chacun des chemins; ces trajets peuvent partir de C pour arriver à E ou partir de E pour arriver à C.

2. On va déterminer le trajet le plus court partant de A pour arriver à G en utilisant l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	$\cancel{\infty}$ 13 A	$\cancel{\infty}$ 17 A	∞	∞	∞	∞	B
		17 A ~~21 B~~	$\cancel{\infty}$ 23 B	$\cancel{\infty}$ 20 B	∞	∞	C
			~~23 B~~ 22 C	~~20 B~~ 19 C	$\cancel{\infty}$ 29 C	∞	E
			22 C		29 C ~~33 E~~	∞	D
					~~29 C~~ 26 D	$\cancel{\infty}$ 44 D	F
						~~44 D~~ 41 F	G

Le trajet le plus court est : A $\xrightarrow{17}$ C $\xrightarrow{5}$ D $\xrightarrow{4}$ F $\xrightarrow{15}$ G; il dure 41 minutes..

Partie B

Sur les sites B et G, l'office de tourisme loue des audio-guides que les visiteurs peuvent rendre sur l'un ou l'autre des deux sites à la fin de la journée. Une étude a mis en évidence que chaque jour :

- 10 % des audio-guides loués sur le site B sont rendus sur le site G, les autres étant rendus sur le site B;
- 15 % des audio-guides loués sur le site G sont rendus sur le site B, les autres étant rendus sur le site G.

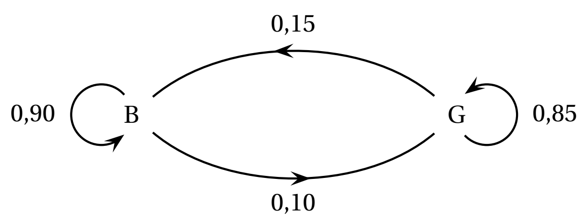
On étudie l'évolution de la répartition des audio-guides sur les deux sites.
Pour tout entier naturel non nul n :

- on note b_n la probabilité qu'un audio-guide choisi au hasard soit rendu sur le site B à la fin de la n-ième journée,
- on note g_n la probabilité qu'un audio-guide choisi au hasard soit rendu sur le site G à la fin de la n-ième journée.

À l'ouverture de la saison, il y a autant d'audio-guides sur le site B que sur le site G.

Pour tout entier naturel non nul n, on note $P_n = \begin{pmatrix} b_n & g_n \end{pmatrix}$ la matrice de l'état probabiliste à la fin de la n-ième journée. On rappelle que $b_n + g_n = 1$. On pose $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Recopier et compléter le graphe probabiliste suivant :



2. D'après le texte, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} b_{n+1} & = & 0,90b_n + 0,15g_n \\ g_{n+1} & = & 0,10b_n + 0,15g_n \end{array} \right.$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle $\begin{pmatrix} b_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & g_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

La matrice de transition est donc $M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n M$.

a. $P_2 = P_1 M = P_0 M \times M = P_0 M^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^2 \approx \begin{pmatrix} 0,544 & 0,456 \end{pmatrix}$.

b. Cela signifie que le deuxième jour, il y a environ 54,4 % des audio-guides qui sont rendus sur le site B, et environ 45,6 % qui sont rendus sur le site G.

Dans la suite, on admettra que pour tout entier naturel n, on a $b_{n+1} = 0,75b_n + 0,15$.

4. Parmi les quatre propositions suivantes, une seule fournit, pour tout entier n, l'expression de b_n en fonction de n.

a. $b_n = -0,1 \times 0,75^n + 0,6$ **b.** $b_n = -0,6 \times 0,75^n + 0,1$
c. $b_n = 0,1 \times 0,75^n + 0,6$ **d.** $b_n = -0,1 \times 0,75^n - 0,6$

On calcule b_0 pour chacune des formules proposées :

a. $b_0 = -0,1 \times 0,75^0 + 0,6 = 0,5$ **b.** $b_0 = -0,6 \times 0,75^0 + 0,1 = -0,5$
c. $b_0 = 0,1 \times 0,75^0 + 0,6 = 0,7$ **d.** $b_0 = -0,1 \times 0,75^0 - 0,6 = -0,7$

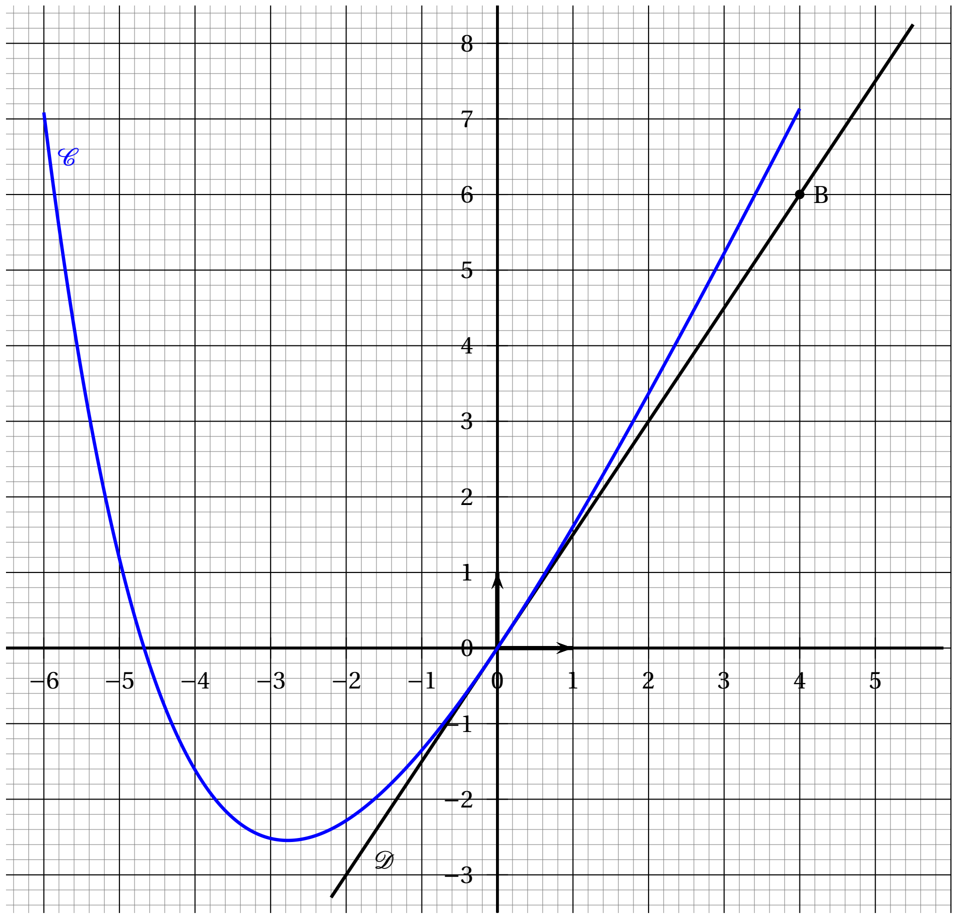
La seule formule qui donne $b_0 = 0,5$ est $b_n = -0,1 \times 0,75^n + 0,6$.

5. La personne chargée de la gestion des audio-guides prétend que le site G accueillera un jour moins de 35 % des audio-guides.

Pour tout n, $b_n = -0,1 \times 0,75^n + 0,6$ donc $b_n \leqslant 0,6$. Or $b_n + g_n = 1$. On en déduit donc que $g_n \geqslant 0,4$ donc le site G accueillera toujours plus de 40 % des audio-guides.
La personne chargée des audio-guides a donc tort.

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-6\,;\,4]$ et dont la courbe $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[-6\,;\,4]$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde sur l'intervalle $[-6\,;\,4]$.



On a représenté $\mathscr{D}$, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
La droite $\mathscr{D}$ passe par l'origine du repère et par le point B(4 ; 6).

1. Avec la précision permise par le graphique :
   a. on peut dire que $f(0) = 0$;
   b. $f'(0) = \dfrac{y_B - y_O}{x_B - y_O} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$;
   c. la courbe $\mathscr{C}$ semble rester au dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[-6\,;\,4]$ donc la fonction f semble convexe sur l'intervalle $[-6\,;\,4]$.
2. On admet que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[-6\,;\,4]$ et que son expression est $f(x) = 2x - 1 + \text{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

   a. Sur l'intervalle $[-6\,;\,4]$, $f'(x) = 2 - 0 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times \text{e}^{-\frac{1}{2}x} = 2 - \dfrac{1}{2}\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

b. On résout sur l'intervalle $[-6;4]$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:

$$f'(x) \geqslant 0 \iff 2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \geqslant 0 \iff 2 \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \iff 4 \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \iff \ln(4) \geqslant -\frac{1}{2}x$$
$$\iff -2\ln(4) \leqslant x$$

Donc l'intervalle solution est $[-2\ln(4);4]$.

c. Pour établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-6;4]$ on calcule :
$f(-6) = -12 - 1 + \mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^3 - 13 \approx 7{,}1$; $f(-2\ln(4)) = -4\ln(4) - 1 + \mathrm{e}^{\ln(4)} = 3 - 4\ln(4) \approx -2{,}5$ et $f(4) = 8 - 1 + \mathrm{e}^{-2} = 7 + \mathrm{e}^{-2} \approx 7{,}1$.

On en déduit le tableau des variations de f sur $[-6;4]$:

x	-6		$-2\ln(4)$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\mathrm{e}^3 - 13$	$\searrow$	$3 - 4\ln(4)$	$\nearrow$	$7 + \mathrm{e}^{-2}$

d. $f(-6) > 0$, $f(-2\ln(4)) < 0$ et $f(4) > 0$ donc, d'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[-6;4]$: une dans $[-6;-2\ln(4)]$ et l'autre dans $[-2\ln(4);4]$.

3. $f(0) = 0 - 1 + \mathrm{e}^0 = 0$ et $0 \in [-2\ln(4);4]$ donc 0 est la solution de l'équation dans $[-2\ln(4);4]$.
La solution non nulle est donc dans l'intervalle $[-6;-2\ln(4)]$; on l'appelle α.
À la calculatrice, on trouve successivement :
$f(-5) \approx 1{,}18 > 0$ et $f(-4) \approx -1{,}6 < 0$ donc $\alpha \in [-5;-4]$.
$f(-4{,}7) \approx 0{,}086 > 0$ et $f(-4{,}6) \approx -0{,}226 < 0$ donc $\alpha \in [-4{,}7;-4{,}6]$.
$f(-4{,}68) \approx 0{,}021 > 0$ et $f(-4{,}67) \approx -0{,}01$ donc $\alpha \in [-4{,}68;-4{,}67]$.

4. $f'(x) = 2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ donc $f''(x) = 0 - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
Sur $[-6;4]$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

5. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $g(x) = x^2 - x - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $[0;4]$.

a. $g'(x) = 2x - 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = 2x - 1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = f(x)$ donc la fonction g est une primitive de la fonction f sur $[-6;4]$.

b. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$ est

$$\frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[g(4) - g(0)\right] = \frac{1}{4}\left[\left(4^2 - 4 - 2\mathrm{e}^{-2}\right) - \left(0 - 0 - 2\mathrm{e}^0\right)\right] = \frac{1}{4}\left(14 - 2\mathrm{e}^{-2}\right) \approx 3{,}43$$