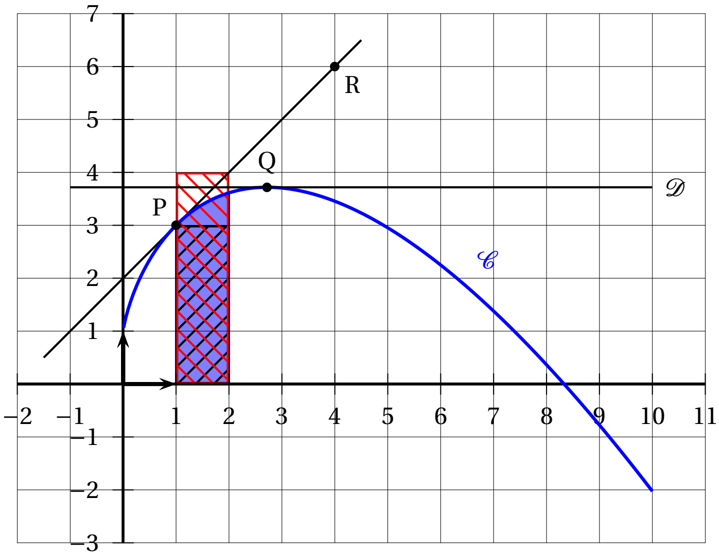
Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat Terminale ES Polynésie
4 septembre 2017

Exercice 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé d'origine O est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~10]$.



On considère les points P $(1~;3)$ et R $(4~;6)$. Le point Q a pour abscisse e, avec $\text{e} \approx 2{,}718$.
Les points P et Q appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q. La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point Q.

Partie A

1. La droite (PR) a pour coefficient directeur le nombre $a = \dfrac{y_{\text{R}} - y_{\text{P}}}{x_{\text{R}} - x_{\text{P}}} = \dfrac{6-3}{4-1} = 1$.

   La seule équation correspondant à un coefficient directeur égal à 1 est $y = x + 2$ donc la bonne réponse est la **b.**

2.
   - Le point P $(1~;~3)$ appartient à $\mathscr{C}$ donc $f(1) = f(x_{\text{P}}) = y_{\text{P}} = 3$.
   - La tangente (PR) à la courbe $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur 1 donc $f'(1) = 1$.

3. D'après le graphique, la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous des tangentes en chaque point de $]0~;~10]$; la fonction f est donc concave sur $]0~;~10]$. Réponse **b.**

4. La fonction f est positive sur $[1~;2]$ donc $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\text{d}x$ est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Cette surface contient un rectangle d'aire 3 et est contenue dans un rectangle d'aire 4 donc $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\text{d}x$ est comprise entre 3 et 4.

Partie B

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~10]$ par : $f(x) = -x\ln x + 2x + 1$.

1. **a.** $f'(x) = -1 \times \ln x - x \times \dfrac{1}{x} + 2 = -\ln x - 1 + 2 = 1 - \ln x$

   b. Pour démontrer que la fonction f admet un maximum sur $]0~;~10]$, on étudie les variations de f donc le signe de f' sur cet intervalle.
   $f'(x) > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \text{e} > x \iff x < \text{e}$
   Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0~;~\text{e}]$, strictement décroissante sur $[\text{e}~;~10]$, et telle que $f'(\text{e}) = 0$. Donc la fonction f admet un maximum pour $x = \text{e}$.

   c. Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~10]$ est
   $f(\text{e}) = -\text{e} \times \ln \text{e} + 2\text{e} + 1 = -\text{e} + 2\text{e} + 1 = \text{e} + 1$.

2. La courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0~;~10]$ si la fonction f est concave sur $]0~;~10]$. On sait qu'une fonction est concave sur un intervalle si et seulement si sa dérivée seconde est négative sur cet intervalle.
   $f'(x) = 1 - \ln x$ donc $f''(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$ sur $]0~;~10]$. Donc la fonction f est concave sur $]0~;~10]$, d'où on déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0~;~10]$.

3. On admet que la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{5}{4}x^2 + x - 7$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~10]$. Donc :
   $$\int_1^2 f(x)\,\text{d}x = \Big[F(x)\Big]_1^2 = \left(-\frac{4}{2}\ln 2 + \frac{5}{4} \times 4 + 2 - 7\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln 1 + \frac{5}{4} + 1 - 7\right) = -2\ln 2 - \frac{5}{4} - 1 + 7$$
   $$= \frac{19}{4} - 2\ln 2$$

Exercice 2 — Commun à tous les candidats — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~10]$ par : $f(x) = 4\,\text{e}^{-0,5x+1} + x - 1$.
On donne page 6 la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[1~;~10]$ dans un repère d'origine O.

Partie A

1. Pour tout réel x de $[1~;~10]$ on a : $f'(x) = 4 \times (-0,5)\,\text{e}^{-0,5x+1} + 1 = -2\,\text{e}^{-0,5x+1} + 1$.

2. **a.** On résout sur l'intervalle $[1~;~10]$ l'équation $f'(x) = 0$:
   $$f'(x) = 0 \iff -2\,\text{e}^{-0,5x+1} + 1 = 0 \iff 1 = 2\,\text{e}^{-0,5x+1} \iff \frac{1}{2} = \text{e}^{-0,5x+1}$$
   $$\iff \ln\frac{1}{2} = -0,5x + 1 \iff 0,5x = 1 - \ln\frac{1}{2}$$
   $$\iff x = \frac{1}{0,5}\Big(1 - (\ln 1 - \ln 2)\Big) \iff x = 2\Big(1 - 0 + \ln 2\Big) \iff x = 2\,(1 + \ln 2)$$
   $$\iff x = 2 + 2\ln 2$$

   b. On place sur le graphique page 6 le point H de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse $2 + 2\ln 2$.

3. On admet que l'ensemble des solutions sur l'intervalle $[1~;~10]$ de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ est $[2 + 2\ln 2~;~10]$.
   La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[1~;~2 + 2\ln 2]$, et elle est strictement croissante sur $[2 + 2\ln 2~;~10]$,

Partie B

L'entreprise « COQUE EN STOCK » fabrique et commercialise des coques pour téléphone portable. Son usine est en mesure de produire entre 100 et 1 000 coques par jour.
La fonction f permet de modéliser le coût de production d'une coque en fonction du nombre de centaines de coques produites par jour. Ainsi, si x désigne le nombre de centaines de coques produites alors $f(x)$ représente le coût, en euros, de production d'une coque.

1. Le coût de production d'une coque dans le cas de la fabrication de 500 coques par jour est $f(5) = 4\,\mathrm{e}^{-1,5} + 4 \approx 4{,}89$ €.
2. **a.** Le coût unitaire minimal de production est obtenu pour $x = 2 + 2\ln 2 \approx 3{,}39$; cela correspond donc à 339 coques par jour.

   b. Le coût unitaire minimal de production d'une coque est donc $f(2+2\ln 2) \approx 4{,}39$ €.

Partie C

Le prix de vente d'une coque peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;\,10]$ par : $g(x) = -\dfrac{1}{4}x + 6$.
Pour que l'entreprise fasse des bénéfices, il faut que le coût unitaire de production soit inférieur au prix de vente unitaire, c'est-à-dire que $f(x) < g(x)$.
Il s'agit donc de résoudre l'inéquation $4\,\mathrm{e}^{-0,5x+1} + x - 1 < -\dfrac{1}{4}x + 6$.
On ne sait pas résoudre cette inéquation algébriquement, donc on va le faire graphiquement.
Sur le graphique page 6, on trace la droite Δ d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x + 6$ représentant la fonction g ; il y a donc un bénéfice quand la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de la droite Δ.
Les quantités de coques à produire par jour afin d'assurer un bénéfice à l'entreprise sont comprises entre 1,5 et 4,8 centaines, soit entre 150 et 480 coques environ.

Exercice 3 — Commun à tous les candidats — 5 points

On considère la suite géométrique (u_n), de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 50$.

1. **a.** On complète l'algorithme ci-dessous afin qu'il calcule et affiche le 25ᵉ terme de cette suite, c'est-à-dire u_{24} :

Variables :	N est un entier naturel
	U est un nombre réel
Initialisation :	U prend la valeur **50**
Traitement :	Pour N allant de 1 à 24
	U prend la valeur $\boldsymbol{U} \times \mathbf{0{,}9}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher U

   b. La suit (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 50$ et de raison $q = 0{,}9$ donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times 0{,}9^n$.

   c. $u_{24} = 50 \times 0{,}9^{24} \approx 3{,}988$.

2. On résout l'inéquation $u_n < 0{,}01$:

$$\begin{array}{rcll}
u_n < 0{,}01 & \iff & 50 \times 0{,}9^n < 0{,}01 & \\
& \iff & 0{,}9^n < \dfrac{0{,}01}{50} & \\
& \iff & 0{,}9^n < 0{,}0002 & \\
& \iff & \ln 0{,}9^n < \ln 0{,}0002 & \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;\,+\infty[\\
& \iff & n \times \ln 0{,}9 < \ln 0{,}0002 & \text{propriété de la fonction ln} \\
& \iff & n > \dfrac{\ln 0{,}0002}{\ln 0{,}9} & \text{car } \ln 0{,}9 < 0
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}0002}{\ln 0{,}9} \approx 80{,}8$ donc le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0{,}01$ est 81.
On peut vérifier que $u_{80} \approx 0{,}011 > 0{,}01$ et que $u_{81} \approx 0{,}098 < 0{,}01$

3. On souhaite calculer la somme $S_{24} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{24}$.
Voici trois propositions d'algorithmes :

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables : N est un entier naturel S est un nombre réel **Initialisation** : S prend la valeur 0 **Traitement** : Pour N allant de 0 à 24 S prend la valeur $S + 50 \times 0{,}9^N$ Fin Pour **Sortie** : Afficher S	**Variables** : N est un entier naturel S est un nombre réel **Initialisation** : S prend la valeur 0 **Traitement** : Pour N allant de 0 à 24 S prend la valeur $50 \times 0{,}9^N$ Fin Pour **Sortie** : Afficher S	**Variables** : N est un entier naturel S est un nombre réel **Initialisation** : S prend la valeur 50 **Traitement** : Pour N allant de 0 à 24 S prend la valeur $S + 50 \times 0{,}9^N$ Fin Pour **Sortie** : Afficher S

a. Un seul de ces algorithmes permet de calculer la somme u_{24} et de l'afficher.

- Dans l'algorithme 2, la valeur S prend à chaque tour de boucle la valeur u_N ; donc en fin d'algorithme, on n'a pas calculé la somme des termes mais seulement le terme u_{24}.
- Dans l'algorithme 3, on initialise S à 50 puis, dans la boucle, on repart de $N = 0$ donc on reprend en compte la valeur $u_0 = 50$.

L'algorithme qui calcule S_{24} est donc l'algorithme 1.

b. La somme des premiers termes d'une suite géométrique est donnée par la formule :
premier terme $\times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$.
Donc $S_{24} = u_0 \times \dfrac{1-q^{25}}{1-q} = 50 \times \dfrac{1-0{,}9^{25}}{1-0{,}9} = 500\left(1-0{,}9^{25}\right) \approx 464$.

4. Pour tout entier naturel n, on note $S_n = u_0 + \cdots + u_n$.
On admet que la suite (S_n) est croissante et que pour tout n, $S_n = 500 - 450 \times 0{,}9^n$.

a. On sait qu'une suite géométrique de raison q avec $-1 < q < 1$ a pour limite 0.
Or $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 500$.

b. Alex affirme que S_n peut dépasser 500 pour une valeur de n suffisamment grande.
Pour tout n, $0{,}9^n > 0$ donc $450 \times 0{,}9^n > 0$ donc $500 - 450 \times 0{,}9^n < 500$; on en déduit que $S_n < 500$ pour tout n, et donc qu'Alex a tort.

Exercice 4 — Commun à tous les candidats — 5 points

Partie A

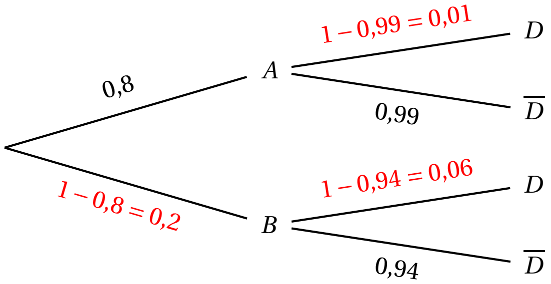
Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smartphones fait ses achats chez deux fournisseurs :

- un fournisseur A qui lui garantit 99 % d'étuis non défectueux ;
- un fournisseur B qui lui garantit 94 % d'étuis non défectueux.

On sait également que 80 % des étuis achetés par l'entreprise proviennent du fournisseur A (le reste provenant du fournisseur B).
On choisit au hasard un étui de smartphone et on considère les évènements suivants :

- A : « l'étui provient du fournisseur A » ;
- B : « l'étui provient du fournisseur B » ;
- D : « l'étui est défectueux ».

1. On construit un arbre pondéré illustrant la situation :



2. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité qu'un étui est défectueux est :
$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=0{,}8\times 0{,}01+0{,}2\times 0{,}06=0{,}02$.
3. On choisit un étui au hasard et on constate qu'il est défectueux.
La probabilité que l'étui provienne du fournisseur B est égale à :
$P_D(B)=\dfrac{P(B\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}2\times 0{,}06}{0{,}02}=0{,}6$.

Partie B

On rappelle que le fournisseur B garantit 94 % d'étuis non défectueux, donc il y a 6 % d'étuis défectueux. Un employé de l'entreprise prélève un échantillon de 400 étuis qui proviennent du fournisseur B. Il constate que 350 de ces étuis ne sont pas défectueux donc 50 sont défectueux.

1. La proportion d'étuis défectueux est égale à $p=0{,}06$ et on choisit un échantillon de taille $n=400$.
$n=400\geqslant 30$, $np=400\times 0{,}06=24\geqslant 5$ et $n(1-p)=400\times 0{,}94=376\geqslant 5$; les conditions sont donc vérifiées pour qu'on puisse établir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion d'étuis défectueux :
$$I=\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$=\left[0{,}06-1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\,(1-0{,}06)}}{\sqrt{400}}\ ;\ 0{,}06+1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\,(1-0{,}06)}}{\sqrt{400}}\right]\approx[0{,}036\ ;\ 0{,}084]$$
2. La fréquence des étuis défectueux dans l'échantillon est $f=\dfrac{50}{400}=0{,}125$.
Cette valeur n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation calculé ; on peut donc estimer, au risque de 5 %, qu'il y a trop d'étuis défectueux dans cet échantillon.
Il faut donc informer le fournisseur d'un problème.

Partie C

Un étui est considéré comme conforme si son épaisseur est comprise entre 19,8 mm et 20,2 mm.
Le fournisseur B souhaite qu'au moins 95 % des étuis produits soient conformes. Pour cela, il veut vérifier les réglages des machines de production.
On choisit un étui au hasard dans la production du fournisseur B.
On note X la variable aléatoire associée à l'épaisseur (en mm) de l'étui. On admet que X suit une loi normale d'espérance 20 mm.

1. En observant les réglages des machines de production, le fournisseur B constate que l'écart-type de X est égal à 0,2. On voudrait que $P(19{,}8\leqslant X\leqslant 20{,}2)\geqslant 0{,}95$.
Si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu=20$ et d'écart-type $\sigma=0{,}2$, alors, d'après le cours, $P(19{,}8\leqslant X\leqslant 20{,}2)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0{,}68<0{,}95$.
Il faut donc revoir les réglages de la machine.
2. On sait aussi que $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0{,}95$. Pour que $P(19{,}8\leqslant X\leqslant 20{,}2)$ soit environ égal à 0,95, il faudrait que $19{,}8=\mu-2\sigma$ et que $20{,}2=\mu+2\sigma$ donc que σ soit égal à 0,1.
Donc si $\sigma=0{,}1$, la probabilité qu'un étui soit conforme est environ égale à 0,95.

ANNEXE

À remettre avec la copie