

Corrigé du baccalauréat ES – Polynésie
16 juin 2017

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

Les justifications n'étaient pas demandées, elles sont données ici à titre indicatif

1. La solution exacte de l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10}$ est :

a. 1,74

b. $\frac{\ln 10 - \ln 3}{\ln 2}$

c. $-\frac{\ln 3}{\ln 5}$

d. 0,5

Solution :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10} &\iff 2^x = \frac{10}{3} \\ &\iff \ln(2^x) = \ln\left(\frac{10}{3}\right) \\ &\iff x \ln(2) = \ln(10) - \ln(3) \\ &\iff x = \frac{\ln(10) - \ln(3)}{\ln(2)}\end{aligned}$$

2. f est la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2xe^{x^2}$.

La valeur exacte de l'intégrale $\int_{-2}^2 f(x) dx$ est :

a. $4e^4 - 4e^{-4}$

b. $4(e^4 + e^{-4})$

c. **0**

d. 1

Solution :

$$\int_{-2}^2 2xe^{x^2} dx = \left[e^{x^2} \right]_{-2}^2 = e^4 - e^4 = 0$$

3. f est la fonction définie pour tout x de l'intervalle $] 0; +\infty[$ par $f(x) = (2x + 3) \ln x$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] 0; +\infty[$.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $] 0; +\infty[$ on a :

a. $f'(x) = \frac{2x+3}{x}$

b. $f'(x) = \frac{2}{x}$

c. $f'(x) = 2 \ln x + \frac{3}{x} + 2$

d. $f'(x) = 2 \ln x + \frac{3}{x}$

Solution :

$$f = uv \implies f' = u'v + uv' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = 2x + 3 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$
$$f'(x) = 2\ln(x) + (2x + 3) \times \frac{1}{x} = 2\ln(x) + \frac{3}{x} + 2$$

4. Une grandeur a été augmentée de 5 % la première année, puis de 7 % la deuxième année.

Sur ces deux années, le pourcentage global d'augmentation est égal à :

- a. 12 % b. 35 % c. 0,35 % d. 12,35 %

Solution :

Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 5% est 1,05 et celui associé à une hausse de 7% est 1,07

Donc sur les deux ans, le coefficient est $1,05 \times 1,07 = 1,1235$ qui correspond à une hausse de 12,35%

Exercice 2

5 points

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

D'après le « bilan des examens du permis de conduire » pour l'année 2014 publiée par le Ministère de l'Intérieur en novembre 2015, 20 % des personnes qui se sont présentées à l'épreuve pratique du permis de conduire avaient suivi la filière de l'apprentissage anticipé de la conduite (AAC). Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen. Pour les candidats n'ayant pas suivi la filière AAC, le taux de réussite à l'examen était seulement de 56,6 %.

On choisit au hasard l'un des candidats à l'épreuve pratique du permis de conduire en 2014.

On considère les événements suivants :

- A « le candidat a suivi la filière AAC » ;
- R « le candidat a été reçu à l'examen ».

On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité de l'évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$. De plus \bar{E} désigne l'évènement contraire de E .

1. a. Donner les probabilités $P(A)$, $P_A(R)$ et $P_{\bar{A}}(R)$.

Solution :

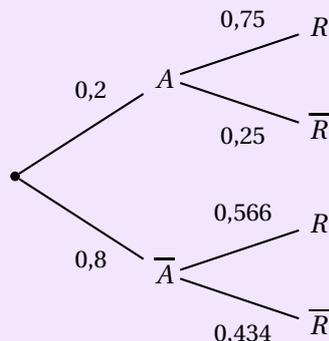
$P(A) = 0,2$ car 20% des candidats ont suivi la filière AAC

$P_A(R) = 0,75$ car parmi les candidats ayant suivi la filière AAC, 75% sont reçus

$P_{\bar{A}}(R) = 0,566$ car parmi les candidats n'ayant pas suivi la filière AAC, 56,6% sont reçus

- b. Traduire la situation par un arbre pondéré.

Solution : avec les données précédentes on obtient l'arbre suivant :



2. a. Calculer la probabilité $P(A \cap R)$.

Solution : $P(A \cap R) = P_A(R) \times P(A) = 0,75 \times 0,2 = 0,15$

- b. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Solution : Il s'agit de la probabilité que la personne choisie ait réussi et ait suivi la filière AAC

3. Justifier que $P(R) = 0,6028$.

Solution : A et \bar{A} forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a

$$P(R) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R) = 0,15 + P_{\bar{A}}(R) \times P(\bar{A}) = 0,15 + 0,566 \times 0,8 = 0,6028$$

4. Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, calculer la probabilité qu'il ait suivi la filière AAC.

On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près de cette probabilité.

Solution : On cherche $P_R(A)$

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0,15}{0,6028} \approx 0,2488$$

PARTIE B

Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,62.

Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 400 candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que 220 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.

Solution : La taille de l'échantillon est $n = 400$ et la proportion supposée de candidats reçus dans la population est $p = 0,62$

On a $n \geq 30$, $np = 80 \geq 5$ et $n(1-p) = 80 \geq 5$ on peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,572 ; 0,668]$$

2. Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école?
Justifier votre réponse.

Solution : la fréquence observée de reçus sur l'échantillon est $f = \frac{220}{400} = 0,55 \notin I$
On peut donc remettre en doute l'affirmation du responsable au risque de 5% de se tromper.

PARTIE C

Selon une enquête menée en 2013 par l'association « Prévention Routière », le coût moyen d'obtention du permis de conduire atteignait environ 1 500 €. On décide de modéliser le coût d'obtention du permis de conduire par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 1 500$ et d'écart-type $\sigma = 410$.

1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité que le coût du permis de conduire soit compris entre 1 090 € et 1 910 €.

Solution : $P(1 090 \leq X \leq 1 910) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$

2. Déterminer $P(X \leq 1 155)$.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

Solution : $P(X \leq 1 155) = 0,5 - P(1 155 \leq X \leq 1 500) \approx 0,20$

3. a. Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel a arrondi à l'unité, vérifiant $P(X \geq a) = 0,2$.

Solution : La courbe de la fonction densité de la loi normale suivie par X est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1 500$
On a $P(X \leq 1 155) = P(X \leq 1 500 - 345) \approx 0,20$ donc par symétrie, on peut affirmer $P(X \geq 1 500 + 345) = P(X \geq 1 845) \approx 0,20$
donc $a = 1 845$

- b. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Solution : La probabilité qu'un permis coûte plus de 1 845 € est d'environ 0,2

Exercice 3

5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série

L

En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre. On estime que, chaque année, cette surface diminue de 0,4 %. Cette perte est en partie compensée par le reboisement, naturel ou volontaire, qui est estimé à 7,2 millions d'hectares par an. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4 000$ et, pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = 0,996 \times u_n + 7,2$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , u_n permet d'obtenir une estimation de la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année 2015 + n .

Solution : Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 0,4% est $1 - \frac{0,4}{100} = 0,996$

Pour trouver la surface de l'année de rang $(n + 1)$, on multiplie la surface de l'année de rang n par 0,996 puis on ajoute 7,2 millions d'hectares de reboisement

On a donc bien $u_{n+1} = 0,996u_n + 7,2$ de plus $u_0 = 4\,000$ car en 2015 il y avait 4 000 millions d'hectares de forêts sur terre

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule et affiche la première année pour laquelle la surface totale de forêt couvre moins de 3 500 millions d'hectares sur terre.

Solution :

Variables :	N est un entier naturel U est un nombre réel
Traitement :	n prend la valeur 0 Tant que $U > 3\,500$ U prend la valeur $0,996U + 7,2$ N prend la valeur $N + 1$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,800$.
- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.

Solution :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} - 1\,800 \\ &= 0,996u_n + 7,2 - 1\,800 \\ &= 0,996u_n - 1\,792,8 \\ &= 0,996(u_n - 1\,800) \\ &= 0,996v_n \end{aligned}$$

On en déduit que (v_n) est géométrique de raison $q = 0,996$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1\,800 = 2\,200$

- b. En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 2\,200 \times 0,996^n + 1\,800$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 2\,200 \times 0,996^n$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1\,800 = 2\,200 \times 0,996^n + 1\,800$

- c. Selon ce modèle et si le phénomène perdure, la surface des forêts sur terre va-t-elle finir par disparaître? Justifier la réponse.

Solution : $|0,996| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,996^n = 0$ et par opération sur les limites,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1\,800$

Donc selon ce modèle les forêts ne devraient pas disparaître mais leur surface devrait se stabiliser aux alentours de 1 800 millions d'hectares

4. Une étude montre que, pour compenser le nombre d'arbres détruits ces dix dernières années, il faudrait planter 140 milliards d'arbres en 10 ans.

En 2016 on estime que le nombre d'arbres plantés par l'Organisation des Nations unies (ONU) est de 7,3 milliards.

On suppose que le nombre d'arbres plantés par l'ONU augmente chaque année de 10 %.

L'ONU peut-elle réussir à replanter 140 milliards d'arbres de 2016 à 2025?

Justifier la réponse.

Solution : Soit w_n le nombre d'arbres replantés en 2016+n en milliards.

(w_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,1$ (coefficient multiplicateur associé à la hausse de 10%) et de premier terme $w_0 = 7,3$.

On cherche à savoir si la somme $S = w_0 + w_1 + \dots + w_9$ est supérieure à 140.

$$S = w_0 + w_1 + \dots + w_9 = w_0 \left(\frac{q^{10} - 1}{q - 1} \right) = 7,3 \times \left(\frac{1,1^{10} - 1}{0,1} \right) \approx 116.$$

L'ONU n'atteindra donc pas l'objectif des 140 milliards d'arbres plantés entre 2016 et 2025

Exercice 3

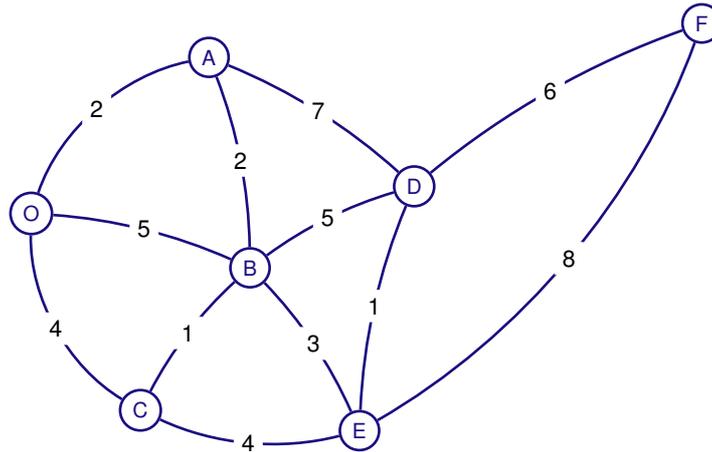
5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Le graphe pondéré représenté ci-dessous illustre le trajet qu'Alex doit suivre en marchant dans les rues de sa ville et le nombre d'animaux virtuels qu'il doit combattre sur la route suivie



À l'aide d'un algorithme, déterminer le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre s'il part du point O pour arriver au point F de la ville. Détailler les étapes de l'algorithme.

Solution : On applique l'algorithme de DIJKSTRA

Départ-Sommet	O	A	B	C	D	E	F
C	0	2, O	5, O	4, O	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
A(O)		2, O	5, O 4, A	4, O	$+\infty$ 9, A	$+\infty$	$+\infty$
B(A)			4, A	4, O	9, A	$+\infty$ 7, B	$+\infty$
C(O)				4, O	9, A-B	7, B 8, C	$+\infty$
E(B)					9, A-B 8, E	7, B	$+\infty$ 15, E
D(E)					8, E		(15, E) 14, D

Alex doit combattre au minimum 14 créatures en allant de O à F: $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F$

PARTIE B

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.

Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x -ième jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a , b et c .

Solution : D'après l'énoncé on a $f(1) = 8$, $f(2) = 25$ et $f(3) = 80$. on obtient le système suivant

$$(S) : \begin{cases} a + b + c = 8 \\ 4a + 2b + c = 10 \\ 9a + 3b + c = 80 \end{cases}$$

2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Solution : $AX = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 4a+2b+c \\ 9a+3b+c \end{pmatrix}$ donc on a bien $(S) \iff AX = B$

3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Calculer $M \times A$.

Solution : $MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ avec I_3 la matrice identité d'ordre 3

- b. Que représente la matrice M pour la matrice A ?

Solution : On a $MA = I_3$ et on montre facilement que $AM = I_3$
Donc $AM = MA = I_3$ ce qui signifie que A est inversible et $A^{-1} = M$

4. A l'aide d'un calcul matriciel, déterminer les valeurs des nombres a , b et c

Solution : $(S) \iff AX = B \iff MAX = MB \iff I_3X = MB \iff X = MB$

$$MB = \begin{pmatrix} 19 \\ -40 \\ 29 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} a = 19 \\ b = -40 \\ c = 29 \end{cases}$$

5. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2 500 personnes.

Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours?

Justifier la réponse.

Solution : On peut faire un tableau des valeurs prises par f :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	8	25	80	173	304	473	680	925	1208	1529

On voit donc que le parc ne risque pas de refuser d'accueillir des personnes sur un de ces dix jours

Exercice 4

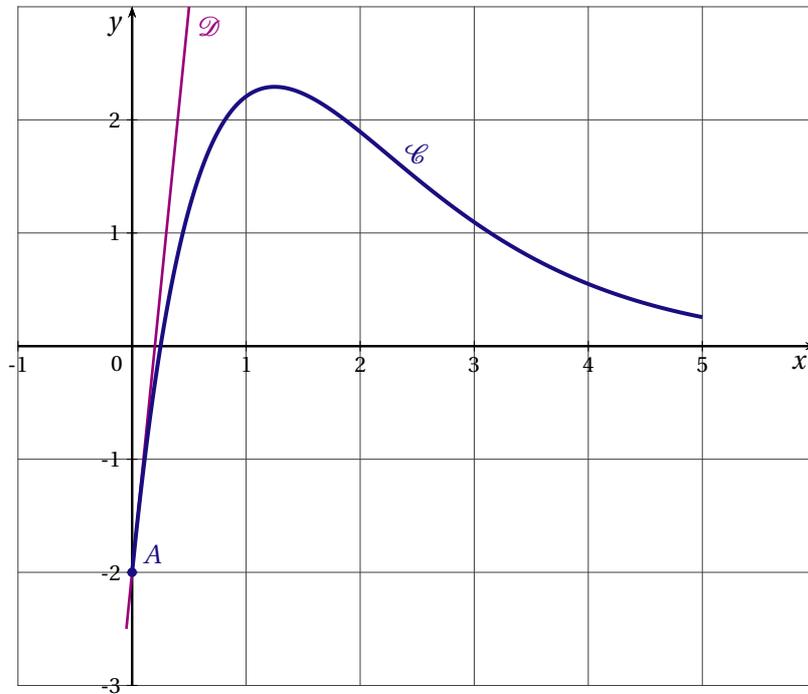
6 points

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = (ax - 2)e^{-x}$, où a est un nombre réel.

On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O .



Les courbes \mathcal{C} et \mathcal{D} passent toutes les deux par le point $A(0; -2)$.

La droite \mathcal{D} est tangente à la courbe \mathcal{C} au point A et admet pour équation $y = 10x - 2$.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

Solution : $f(0) = -2$ et $f'(0) = 10$

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax + a + 2)e^{-x}$$

Solution : $f = uv \implies f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = ax - 2 \\ v(x) = e^{-x} \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = a \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$
 $f'(x) = ae^{-x} - (ax - 2)e^{-x} = (-ax + a + 2)e^{-x}$

b. Dédire des questions précédentes que $a = 8$.

Solution : $f'(0) = 10 \iff a + 2 = 10 \iff a = 8$

c. Donner l'expression de $f'(x)$.

Solution : On en déduit que $f'(x) = (-8x + 10)e^{-x}$

3. a. Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 5]$. On pourra faire un tableau.

Solution : $e^{-x} > 0$ sur $[0 ; 5]$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-8x + 10)$

x	0	1,25	5
$f'(x)$	+	0	-

b. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

Solution : On obtient les variations de f sur $[0 ; 5]$

x	0	1,25	5
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-2	$8e^{-1,25}$	$38e^{-5}$

c. Résoudre sur l'intervalle $[0;5]$ l'équation $f(x) = 0$.

Solution : $f(x) = 0 \iff (8x - 2)e^{-x} = 0 \iff 8x - 2 = 0 \iff x = 0,25$

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8 * x + 10) * \exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x + 10) e^{-x}$
2	Dériver $[g(x), x]$ $\rightarrow (8 * x - 18) * \exp(-x)$
3	Résoudre $[(8 * x - 18) * \exp(-x) > 0, x]$ $\rightarrow x > 9/4$

En utilisant ces résultats :

a. Donner l'expression de f'' , fonction dérivée seconde de la fonction f .

Solution : La première ligne du logiciel donne l'expression de $f'(x)$ donc la deuxième ligne donne celle de $f''(x)$
 On a donc $f''(x) = (8x - 18)e^{-x}$

b. Justifier que la courbe \mathcal{C} admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.

Solution : La troisième ligne permet de déterminer le signe de $f''(x)$:

x	0	2,25	5
$f''(x)$	-	0	+

Donc $f''(x)$ s'annule en $x = \frac{9}{4} = 2,25$ en changeant de signe, on peut alors affirmer que \mathcal{C} admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = \frac{9}{4}$

5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0;5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x - 2)e^{-x}$$

- a. Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal?

Solution : Le bénéfice sera maximal quand f sera maximal. D'après la question 3, on peut déduire que le bénéfice sera maximal pour 1 250 grille-pains fabriqués

- b. Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal?

On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

Solution : Le bénéfice maximal est $f(1,25) = 8e^{-1,25} \approx 2,29204$ soit environ 229 204 €.