Baccalauréat ES/L – Nouvelle Calédonie
26 novembre 2019

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}9x^3 + 1{,}5x^2 + 1{,}5$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Le nombre de points d'intersection entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y = 2$ est :

   a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** $\boxed{3}$

   Le nombre de points d'intersection est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
   Comme on ne demande pas de justification, on peut utiliser la calculatrice pour trouver les solutions de l'équation $f(x) = 2$.
   On trouve 3 solutions qui sont environ 1,37 ; 0,80 et $-0{,}51$.
   Réponse d.

2. Une des solutions de l'inéquation $1 - 0{,}85^n > 0{,}99$ d'inconnue n entier naturel est :

   a. 28 **b.** $\boxed{29}$ **c.** $\dfrac{\ln 0{,}85}{\ln 0{,}01}$ **d.** 28,336

   Les réponses **c** et **d** sont à éliminer puisque les nombres ne sont pas entiers.
   On a $1 - 0{,}85^{28} \approx 0{,}989 < 0{,}99$ et $1 - 0{,}85^{29} \approx 0{,}991 > 0{,}99$.
   Réponse b.

3. Esteban va à l'école chaque matin avec une trousse. À la fin de la journée, il oublie sa trousse avec une probabilité de 0,2. Dans l'année le nombre de jours d'école est de 162.
   On considère que les oublis journaliers sont indépendants les uns des autres.
   La probabilité qu'il oublie sa trousse 30 fois exactement dans l'année est environ :

   a. 0,19 **b.** $\boxed{0{,}07}$ **c.** 0,60 **d.** 0,36

   Le nombre de jours pendant lesquels Esteban oublie sa trousse peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 162$ et $p = 0{,}2$.
   $P(X = 30) = \dbinom{162}{30} 0{,}2^{30}\,(1 - 0{,}2)^{162-30} \approx 0{,}07$.
   Réponse b.

4. Une enquête a pour objectif d'estimer la proportion de personnes partant en vacances à l'étranger durant la semaine de Noël. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,001 au niveau de confiance 0,95 de cette proportion, la taille de l'échantillon doit être égale à :

   a. $\boxed{4\,000\,000}$ **b.** 1 000 **c.** 2 000 **d.** 1 000 000

   Un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % a pour amplitude $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
   $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}001 \iff \dfrac{2}{0{,}001} = \sqrt{n} \iff 2000 = \sqrt{n} \iff 4\,000\,000 = n$

   Réponse a.

Exercice 2 — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Partie A

La responsable d'un aquarium public constate qu'en l'absence d'action particulière la population d'une espèce de poisson augmente de 20 % par an.
Pour démarrer un nouveau bassin, elle décide de prélever 28 poissons à la fin de chaque année
La situation est modélisée par une suite (u_n) de terme initial $u_0 = 150$, le terme u_n donnant une estimation du nombre de poissons au 1er janvier de l'année $2018 + n$.

1. Pour estimer le nombre u_1 de poissons en 2019, on ajoute 20 % à $u_0 = 150$ puis on soustrait 28 : $u_1 = 150 + 150 \times \dfrac{20}{100} - 28 = 152$.
   Pour estimer le nombre u_2 de poissons en 2020, on ajoute 20 % à $u_1 = 152$ puis on soustrait 28 : $u_2 = 152 + 152 \times \dfrac{20}{100} - 28 \approx 154$.
2. Pour estimer le nombre u_{n+1} de poissons en $2018 + (n+1)$, on ajoute 20 % à u_n puis on soustrait 28. Mais ajouter 20 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{20}{100} = 1{,}2$.
   Donc pour tout n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 28$.
3. On définit la suite (w_n) par : $w_n = u_n - 140$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $u_n = w_n + 140$.
   a.
   - $w_{n+1} = u_{n+1} - 140 = 1{,}2u_n - 28 - 140 = 1{,}2(w_n + 140) - 168 = 1{,}2w_n + 168 - 168$
     $= 1{,}2w_n$
   - $w_0 = u_0 - 140 = 150 - 140 = 10$

   Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme $w_0 = 10$.

   b. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $w_n = w_0 \times q^n = 10 \times 1{,}2^n$.
   Comme $u_n = w_n + 140$, on déduit que $u_n = 10 \times 1{,}2^n + 140$.
4. À la calculatrice, on trouve $u_9 \approx 192$ et $u_{10} \approx 202$ donc il faut prévoir l'achat d'un autre aquarium au plus tard en $2018 + 9$ soit en 2027.

Partie B

On sait qu'il y a eu 1 350 visiteurs le premier mois et que le prix d'entrée est fixé à 8 euros. La responsable fait l'hypothèse d'une augmentation mensuelle de la fréquentation des visiteurs de 12 %. Elle veut alors savoir, sous cette hypothèse, la recette totale accumulée durant les six premiers mois.

1. On complète l'algorithme suivant pour qu'il détermine la recette cherchée.

```
S ← 0
V ← 1350
Pour N allant de 1 à 6
    S ← S + V
    V ← 1,12V
Fin Pour
S ← 8S
```

   Explications
   - On cherche la recette totale sur 6 mois donc on cumule pour N variant de 1 à 6.
   - Dans l'algorithme, sauf à la dernière ligne, S désigne le total des visiteurs.
   - À la dernière ligne, on calcule la somme encaissée en multipliant le nombre total de visiteurs par 8, qui est le prix d'entrée. On remet cette somme dans la variable S.
2. On cherche le montant de la recette en faisant tourner l'algorithme ;

N	S	V
	0	1350
1	1350	1512
2	2862	1693
3	4555	1896
4	6451	2124
5	8575	2379
6	10954	2664

$10954 \times 8 = 87632$

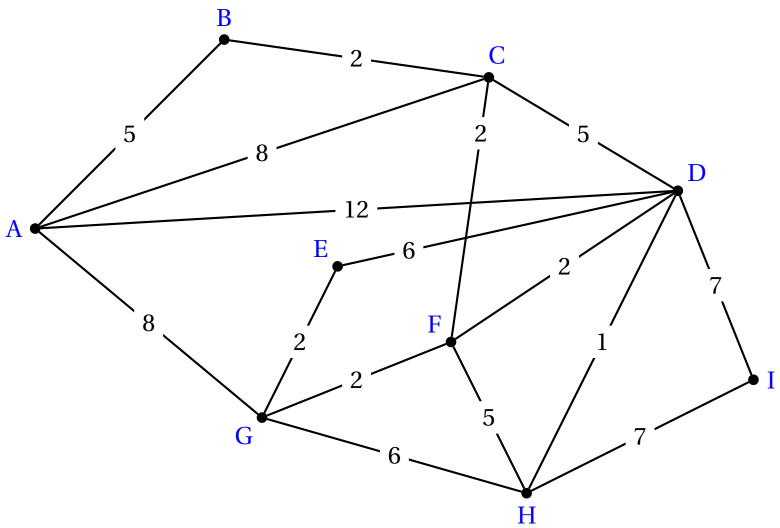
La somme cherchée est 87 632 €.

Exercice 2 — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Sur son lieu de vacances d'été, Inaé décide de pratiquer son activité favorite : le vélo tout terrain (VTT). Le plan des sentiers VTT de la région est représenté par le graphe ci-dessous.
Les arêtes représentent les sentiers, les sommets représentent les intersections de ces sentiers et le poids des arêtes désigne la distance en km entre chaque intersection.



1. On cherche les degrés de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Degré	4	2	4	6	2	4	4	4	2

   Tous les sommets sont de degré pair, donc d'après le théorème d'Euler on peut explorer tous les sentiers en y passant une et une seule fois. On peut partir de n'importe quel sommet et on se retrouve au même sommet à la fin du cycle.

   Exemple d'un cycle partant du sommet A :

   A - B - C - A - D - C - F - D - E - G - F - H - I - H - G - A

2. Inaé se trouve en A et a rendez-vous au point I. Elle veut s'y rendre en empruntant l'itinéraire le plus court.
   On va utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer cet itinéraire le plus court.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	~~∞~~ 5 A	~~∞~~ 8 A	~~∞~~ 12 A	∞	∞	~~∞~~ 8 A	∞	∞	B (5)
		~~8 A~~ 7 B	12 A	∞	∞	8 A	∞	∞	C (7)
			12 A 12 C	∞	~~∞~~ 9 C	8 A	∞	∞	G (8)
			12 A	~~∞~~ 10 G	9 C ~~10 G~~		~~∞~~ 14 G	∞	F (9)
			~~12 A~~ 11 F	10 G			14 G 14 H	∞	E (10)
			11 F ~~16 E~~				14 G	∞	D (11)
							~~14 G~~ 12 D	~~∞~~ 18 D	H (12)
								~~18 D~~ 19 H	I (18)

L'itinéraire le plus court est : A $\xrightarrow{5}$ B $\xrightarrow{2}$ C $\xrightarrow{2}$ F $\xrightarrow{2}$ D $\xrightarrow{7}$ I ; sa longueur est de 18 km.

Partie B

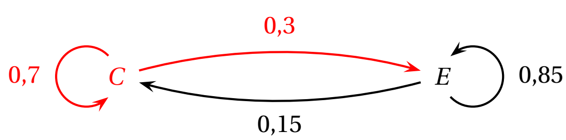
En 2018, des vélos électriques ont été mis en location. Les clients ont donc eu le choix entre des vélos classiques et des vélos électriques. En 2018, seulement 10 % des clients ont loué des vélos électriques.
On admet que tous les clients louent un vélo et que :

- 85 % des clients ayant loué un vélo électrique une année en relouent un l'année suivante ;
- 70 % des clients ayant loué un vélo classique une année en relouent un l'année suivante.

On suppose que le nombre de clients chaque été reste constant. On s'intéresse à la répartition des clients dans les années à venir.
On note pour tout entier naturel n :

- c_n la probabilité qu'un client pris au hasard choisisse un vélo classique l'année $2018+n$;
- e_n la probabilité qu'un client pris au hasard choisisse un vélo électrique l'année $2018+n$;
- $P_n = \begin{pmatrix} c_n & e_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste l'année $2018+n$.

1. On note C l'évènement « le client loue un vélo classique » et E l'évènement « le client loue un vélo électrique ».
On représente la situation par un graphe probabiliste :



2. En 2018 10 % des clients ont loué des vélos électriques donc $e_0 = 0{,}1$ et donc $c_0 = 0{,}9$.
On en déduit que $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

D'après le texte, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} c_{n+1} & = & 0{,}7\,c_n + 0{,}15\,e_n \\ e_{n+1} & = & 0{,}3\,c_n + 0{,}85\,e_n \end{array} \right.$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} c_{n+1} & e_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

Donc la matrice de transition du graphe est $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

3. $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,645 & 0,355 \end{pmatrix}$

4. L'état stable du graphe probabiliste est l'état $P = \begin{pmatrix} c & e \end{pmatrix}$ tel que $P \times M = P$ sachant que $c + e = 1$.

$P \times M = P \iff \begin{pmatrix} c & e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & e \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,7c + 0,15e & = & c \\ 0,3c + 0,85e & = & e \end{array} \right.$

$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -0,3c + 0,15e & = & 0 \\ 0,3c - 0,15e & = & 0 \end{array} \right. \iff 0,3c = 0,15e \iff 2c = e$

Comme de plus $c + e = 1$, on arrive à $3c = 1$ donc à $c = \dfrac{1}{3}$ et $e = \dfrac{2}{3}$.

L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Cela veut dire qu'à terme, il y aura en location un tiers de vélos classiques et deux tiers de vélos électriques.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Lors d'un safari photo en Afrique, un groupe de touristes souhaite observer des familles d'éléphants. Le guide leur explique que :

- la probabilité de voir des éléphants adultes dans la journée est de 0,85;
- la probabilité de voir des bébés éléphants sachant que l'on voit des éléphants adultes est de 0,5;
- la probabilité d'observer des bébés éléphants mais pas d'adultes éléphants dans la journée est de 0,015.

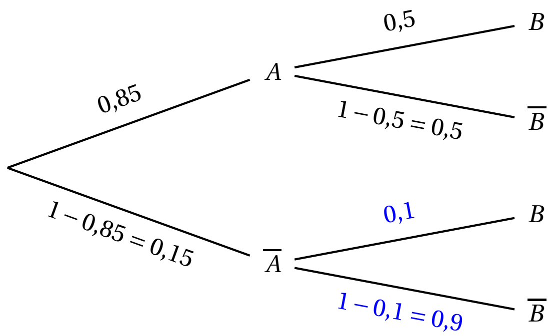
On choisit au hasard un touriste de ce groupe et on considère les évènements suivants :

A : « Le touriste voit des éléphants adultes dans la journée »;

B : « Le touriste voit des bébés éléphants dans la journée ».

1. La probabilité d'observer des bébés éléphants mais pas d'adultes éléphants dans la journée est de 0,015 donc $p\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,015$.

2. On représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré qui sera complété en bleu au fur et à mesure de l'exercice :



3. D'après la formule des probabilités totales :
$p(B) = p\left(A \cap B\right) + p\left(\overline{A} \cap B\right) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,85 \times 0,5 + 0,015 = 0,44$

4. **a.** $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{p\left(\overline{A} \cap B\right)}{p\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{0,015}{0,15} = 0,1$; on peut donc compléter l'arbre pondéré.

   b. Il y a donc 10 % de chances de voir des bébés éléphants quand on n'a pas vu d'adultes éléphants.

Partie B

À 20 h, le groupe de touristes fait une pause autour d'un point d'eau pour observer le bain des éléphants. On considère que le temps d'attente en minute nécessaire pour observer des éléphants suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 90]$.

1. Si on appelle T la variable aléatoire qui donne le temps d'attente, la probabilité que le groupe attende plus d'une heure avant d'apercevoir les éléphants est
$p(60 < T \leqslant 90) = \dfrac{90-60}{90-0} = \dfrac{1}{3}$.
2. $\dfrac{0+90}{2} = 45$ donc l'heure moyenne d'arrivée des éléphants est 20 h 45.

Partie C

Lors de leur séjour, les touristes ont appris que les éléphants d'Afrique sont généralement plus grands que les éléphants d'Asie.
On modélise la taille en centimètre d'un éléphant d'Afrique par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ. De même, on modélise la taille en centimètre d'un éléphant d'Asie par une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne μ' et d'écart type σ'.
Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ des densités de probabilité associées à X et Y sont données en **annexe 1**.

1. **a.** La courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à une variable aléatoire qui a l'espérance la plus grande des deux donc, d'après le texte, elle correspond aux éléphants d'Afrique donc à la variable aléatoire X.
La variable aléatoire Y correspond donc à la courbe $\mathscr{C} - 2$.
b. Pour donner une valeur approchée à la dizaine de l'espérance pour chacune des variables aléatoires, on cherche les axes de symétrie des courbes :
   - Pour la variable aléatoire X qui correspond à $\mathscr{C}_1$, on peut estimer μ à 330.
   - Pour la variable aléatoire Y qui correspond à $\mathscr{C}_2$, on peut estimer μ' à 279.
2. On représente graphiquement $p(X > 330)$ (domaine hachuré en bleu) et $p(Y > 330)$ (domaine quadrillé en rouge et bleu). On déduit que $p(X > 330) > p(Y > 330)$.
3. **a.** Sachant que $\mu' = 268$ et $\sigma' = 50$, on a $p(Y > 330) \approx 0{,}11$.
b. Cela signifie qu'il y a environ 11 % des éléphants d'Asie qui ont une taille en centimètre supérieure à 330.

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(-5x^2+5\right)\mathrm{e}^{x}$.
On note f' la fonction dérivée de f, et f'' la fonction dérivée seconde. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan, donnée en **annexe 2**.

1. **a.** Le point A est l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées, donc il a pour abscisse 0. Ce point a pour ordonnée : $f(0) = 5\mathrm{e}^{0} = 5$.
Donc le point A a pour coordonnées $(0 ; 5)$.
b. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en des points d'ordonnées nulles.
On résout l'équation $f(x) = 0$. Comme pour tout x, $\mathrm{e}^{x} > 0$, on résout $-5x^2+5 = 0$:
$-5x^2+5 = 0 \iff 5\left(1-x^2\right) = 0 \iff 5(1+x)(1-x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$
Les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont B $(-1 ; 0)$ et C $(1 ; 0)$
c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-10x) \times \mathrm{e}^{x} + \left(-5x^2+5\right) \times \mathrm{e}^{x} = \left(-5x^2-10x+5\right)\mathrm{e}^{x}$.

d. Pour tout x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-5x^2 - 10x + 5$

Le discriminant vaut $(-10)^2 - 4 \times (-5) \times 5 = 200$ donc le polynôme $-5x^2 - 10x + 5$ admet deux racines $x_1 = \dfrac{10 + \sqrt{200}}{-10} = \dfrac{10 + 10\sqrt{2}}{-10} = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.

Ce trinôme du second degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines donc :

x	-5		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		2
$-5x^2 - 10x + 5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut donc en déduire que :

- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-5\,;\,-1-\sqrt{2}\right]$;
- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-1-\sqrt{2}\,;\,-1+\sqrt{2}\right]$;
- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-1+\sqrt{2}\,;\,2\right]$;

2. Soit Δ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

a. Une équation de Δ est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

$f(0) = 5$ et $f'(0) = 5$ donc Δ a pour équation $y = 5(x-0)+5$ soit $y = 5x + 5$.

b. On détermine deux points de Δ pour la tracer : on sait que $A \in \Delta$, et pour $x = -1$, $y = 0$ donc Δ passe par le point B de coordonnées $(-1\,;\,0)$.

Voir **annexe 2** pour le tracé.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants que l'on pourra utiliser sans justification :

1	$f(x)$
○	$\rightarrow\ (-5x^2+5)\,e^x$
2	$f''(x)$
○	$\rightarrow\ -20x\,e^x - 5x^2\,e^x - 5\,e^x$
3	Résoudre $(f''(x) = 0, x)$
○	$\rightarrow\ \left\{x = -\sqrt{3}-2, x = \sqrt{3}-2\right\}$

a. D'après le logiciel de calcul formel, $f''(x) = -20x\,e^x - 5x^2\,e^x - 5\,e^x = -(5x^2 + 20x + 5)\,e^x$.

b. D'après le logiciel de calcul formel, l'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = -\sqrt{3}-2$ et $x_2 = \sqrt{3}-2$. Or pour tout x, $e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe du polynôme du second degré $-(5x^2 + 20x + 5)$ qui a pour racines $x_1 = -\sqrt{3}-2$ et $x_2 = \sqrt{3}-2$. Ce polynôme est du signe du coefficient de x^2, donc négatif, à l'extérieur des racines :

x	-5		$-\sqrt{3}-2$		$\sqrt{3}-2$		2
$-(5x^2+20x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc :

- $f''(x) < 0$ sur $\left[-5\,;\,-\sqrt{3}-2\right[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
- $f''(x) > 0$ sur $\left]-\sqrt{3}-2\,;\,\sqrt{3}-2\right[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle ;
- $f''(x) < 0$ sur $\left]\sqrt{3}-2\,;\,2\right]$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

4. On s'intéresse à l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

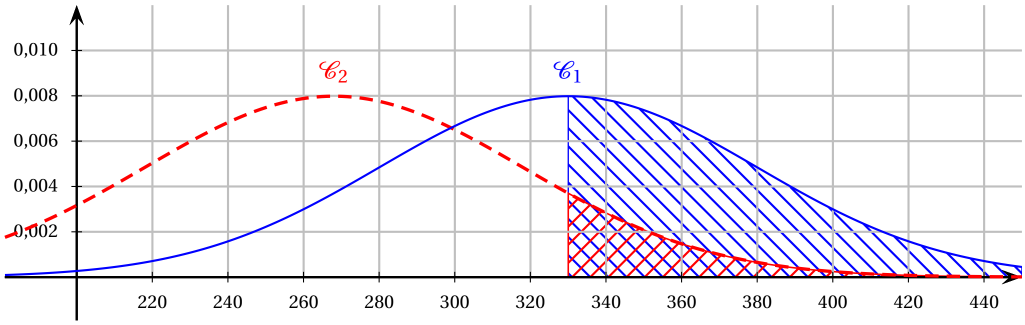
a. On hachure sur **l'annexe 2** ce domaine.

b. On admet que sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, la droite Δ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$.
L'aire $\mathscr{A}$ est donc inférieure à l'aire du triangle rectangle OAB.
L'aire de OAB est $\dfrac{\text{OA} \times \text{OB}}{2} = \dfrac{5 \times 1}{2} = 2{,}5$.
Donc l'aire $\mathscr{A}$ est inférieure à 2,5 unités d'aire.

c. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(-5x^2+10x-5\right)\mathrm{e}^{\,x}$ est une primitive de f, donc :
$\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = F(0) - F(-1) = \left(-5\,\mathrm{e}^{\,0}\right) - \left((-5-10-5)\,\mathrm{e}^{\,-1}\right) = -5+20\,\mathrm{e}^{\,-1} \approx 2{,}36$

Annexes à rendre avec la copie

Annexe 1
Exercice 3



Annexe 2
Exercice 4