Corrigé du baccalauréat Terminale ES/L
Métropole - La Réunion – 11 septembre 2020

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^{-x^2+1}$.
La fonction f admet pour dérivée la fonction f' définie sur par :

a. $f'(x) = \text{e}^{-x^2+1}$ **b.** $f'(x) = \left(-x^2+1\right)\text{e}^{-x^2+1}$

$\boxed{\textbf{c. } f'(x) = -2x\,\text{e}^{-x^2+1}}$ **d.** $f'(x) = \text{e}^{-2x}$

La dérivée de la fonction $x \longmapsto \text{e}^{u(x)}$ est la fonction $x \longmapsto u'(x)\,\text{e}^{u(x)}$.

2. Soit a un réel quelconque. On pose : $B = \dfrac{\text{e}^{a} \times \text{e}^{3-a}}{\text{e}}$.
Alors :

$\boxed{\textbf{a. } B = \text{e}^{2}}$ **b.** $B = 7,39$ **c.** $B = \text{e}^{3a-a^2-1}$ **d.** $B = a \times \text{e}^{3-a}$

$B = \dfrac{\text{e}^{a} \times \text{e}^{3-a}}{\text{e}} = \dfrac{\text{e}^{a+3-a}}{\text{e}} = \dfrac{\text{e}^{3}}{\text{e}} = \text{e}^{2}$

3. Un institut réalise un sondage sur « les Français et la musique » auprès d'un échantillon représentatif de 1 408 personnes.
28 % des personnes interrogées déclarent qu'elles chantent régulièrement sous la douche (*données : Institut BVA-Presse Régionale-Foncia, mars* 2017).
Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 0,95 et dont les bornes sont arrondies au millième, de la proportion de Français qui chantent régulièrement sous la douche est :

$\boxed{\textbf{a. } [0,253\,;\,0,307]}$ **b.** $[1\,013\,;\,1\,803]$ **c.** $[0,201\,;\,0,359]$ **d.** $[0,279\,;\,0,281]$

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
$f = 0,28$ et $n = 1\,408$ donc l'intervalle est $\left[0,28 - \dfrac{1}{\sqrt{1\,408}}\,;\,0,28 + \dfrac{1}{\sqrt{1\,408}}\right] \approx \left[0,253\,;\,0.307\right)$.

Pour les deux questions suivantes, on utilisera le repère ci-dessous, dans lequel on a tracé la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur $[-10\,;\,9]$. La tangente au point A de coordonnées (4 ; 5) passe par le point B de coordonnées (-8 ; 3).

4. Le nombre dérivé $g'(4)$ est égal à :

a. 5 **b.** 0 **c.** 6 $\boxed{\textbf{d. } \dfrac{1}{6}}$

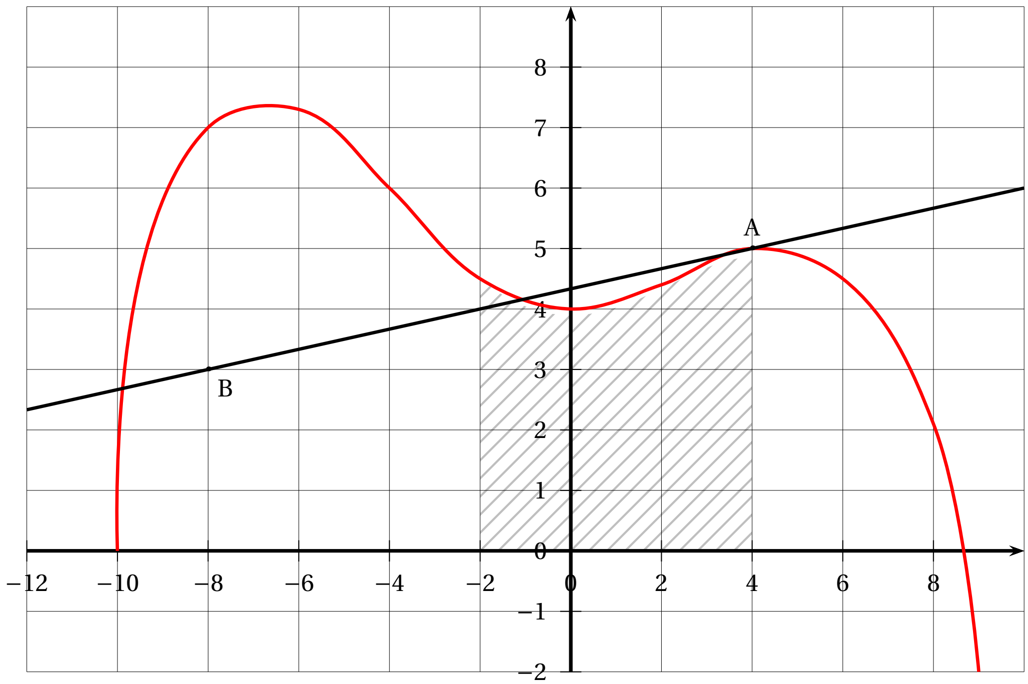
$g'(4)$ est le coefficient directeur de la droite (AB).
$g'(4) = \dfrac{y_{\text{A}} - y_{\text{B}}}{x_{\text{A}} - y_{\text{B}}} = \dfrac{5-3}{4-(-8)} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

5. On pose $I = \displaystyle\int_{-2}^{4} g(x)\,\text{d}x$.

a. $12 \leqslant I \leqslant 15$ $\boxed{\textbf{b. } 24 \leqslant I \leqslant 30}$

c. $I = 6$ **d.** $I = g(4) - g(-2)$

L'intégrale I est égale à l'aire de la partie hachurée de la figure, donc est comprise entre 12 et 15 carreaux, donc entre 24 et 30 unités d'aire.



Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

En France, la pratique de l'escalade est en plein essor ces dernières années, notamment grâce aux nombreuses ouvertures de salles dans les villes. La Fédération Française de la Montagne et de l'Escalade (FFME) comptait 90 000 adhérents au début de l'année 2017.

On estime qu'au début de chaque année :

- 21 % des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 29 400 nouveaux pratiquants s'inscrivent.

À partir de ces données, on modélise le nombre d'adhérents n années après le début de l'année 2017 par une suite (u_n). Ainsi $u_0 = 90\,000$.

1.
   - En 2017, le nombre d'adhérents est 90 000.
     On retire 21 % : $90000 - 90000 \times \dfrac{21}{100} = 71\,100$.
     On ajoute 29 400 nouveaux adhérents : $71\,100 + 29400 = 100500$.
     En 2018, le nombre d'adhérents est donc 100 500.
   - On retire 21 % : $100500 - 100500 \times \dfrac{21}{100} = 79395$.
     On ajoute 29 400 nouveaux adhérents : $79395 + 29400 = 108795$.
     En 2019, le nombre d'adhérents est donc 108 795.
2. On passe du nombre u_n d'adhérents l'année n, au nombre d'adhérents u_{n+1} en retirant 21 %, puis en ajoutant 29 400

   Retirer 21 %, c'est multiplier par $\left(1 - \dfrac{21}{100}\right) = \dfrac{79}{100}$ soit $0,79$.

   Donc pour tout n, $u_{n+1} = 0,79u_n + 29400$.

3. On souhaite déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 135\,000$.
On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
U ← 90000
Tant que ...
    N ← N+1
    U ← ...
Fin Tant que
```

a. On complète l'algorithme :

```
N ← 0
U ← 90000
Tant que U ⩽ 135000
    N ← N+1
    U ← U × 0,79 + 29400
Fin Tant que
```

b. À la calculatrice on trouve $u_9 \approx 134\,007$ et $u_{10} \approx 135\,266$; donc la variable N vaut 10 en sortie d'algorithme.
Donc à partir de 2017 + 10 soit 2027, le nombre d'adhérents sera supérieur à 135 000.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 140\,000$; donc $u_n = v_n + 140\,000$.

a.
- $v_{n+1} = u_{n+1} - 140\,000 = 0,79u_n + 29\,400 - 140\,000 = 0,79\,(v_n + 140\,000) - 110\,600$
  $= 0,79v_n + 110\,600 - 110\,600 = 0,79v_n$
- $v_0 = u_0 - 140\,000 = 190\,000 - 140\,000 = -50\,000$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,79$ et de premier terme $v_0 = -50\,000$.

b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,79$ et de premier terme $v_0 = -50\,000$ donc pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -50\,000 \times 0,79^n$.
Or $u_n = v_n + 140\,000$, donc pour tout n, $u_n = -50\,000 \times 0,79^n + 140\,000$.

c. $-50\,000 \times 0,79^n < 0$ donc $-50\,000 \times 0,79^n + 140\,000 < 140\,000$ donc pour tout n, $u_n < 140\,000$.
La FFME ne peut donc pas espérer dépasser les 140 000 adhérents.

5. Pour automatiser l'estimation du nombre d'adhérents et du nombre de personnes ne renouvelant pas leur adhésion chaque année, on prépare la feuille de calcul suivante, dans laquelle les colonnes B et C sont au format nombre, arrondi à l'unité.

	A	B	C
1	n	u_n	nombre de non renouvellements
2	0	90 000	
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		

a. Pour obtenir les termes de la suite (u_n), on va saisir dans la cellule B3 la formule `= B2 * 0,79 + 29400`.

b. Pour estimer le nombre de personnes ne renouvelant pas leur adhésion en début d'année, on va saisir dans la cellule `C3` la formule
$\boxed{\texttt{= B2 * 0,21}}$.

Exercice 3 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de L

Partie A

Une scierie produit des planches en chêne, en sapin ou en bois de hêtre pour fabriquer des parquets massifs. Il existe deux qualités de planche : les planches déclassées (de moins bonne qualité) et les planches de premier choix (de qualité supérieure).

On sait que :
- 20 % des planches produites sont en chêne,
- 66 % des planches sont en sapin,
- les autres sont en bois de hêtre.

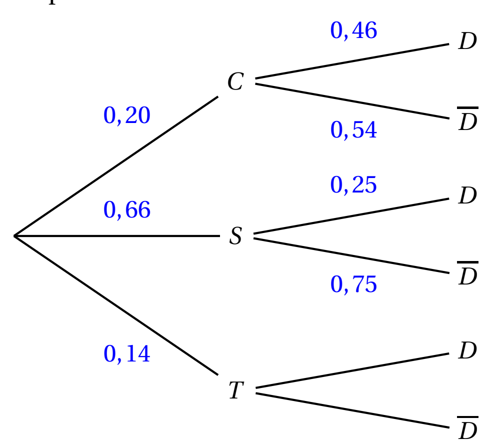
De plus, 46 % des planches en chêne sont déclassées et 25 % des planches en sapin sont déclassées.

On choisit une planche au hasard dans la production de la scierie, et on définit les évènements :

- C : « la planche est en chêne » ;
- S : « la planche est en sapin » ;
- T : « la planche est en hêtre » ;
- D : « la planche est déclassée ».

1. **a.**
- 20 % des planches produites sont en chêne, donc $p(C) = 0,20$.
- 46 % des planches en chêne sont déclassées, donc $p_C(D) = 0,46$.
- 25 % des planches en sapin sont déclassées, donc $p_S(D) = 0,25$.

b. On représente la situation par l'arbre suivant :



2. La probabilité que la planche soit en chêne et déclassée est
$p(C \cap D) = p(C) \times p_C(D) = 0,20 \times 0,46 = 0,092$.

3. On sait que la scierie produit 32 % de planches déclassées, donc $p(D) = 0,32$.
D'après la formule des probabilités totales : $p(D) = p(C \cap D) + p(S \cap D) + p(T \cap D)$.
$p(D) = 0,32$, $p(C \cap D) = 0,092$ et $p(S \cap D) = 0,66 \times 0,25 = 0,165$
Donc $0,32 = 0,092 + 0,165 + p(T \cap D)$ et donc $p(T \cap D) = 0,32 - 0,092 - 0,165 = 0,063$.

4. On choisit une planche de la production en bois de hêtre.
La probabilité qu'elle soit déclassée est $p_T(D) = \dfrac{p(T \cap D)}{p(T)} = \dfrac{0,063}{0,14} = 0,45$.

Partie B

On choisit un lot de 10 planches au hasard, et on suppose que le nombre de planches déclassées dans ce lot peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,32$.

1. $p(X=4) = \binom{10}{4} \times 0,32^4 \times (1-0,32)^{10-4} \approx 0,218$
   La probabilité qu'il y ait exactement 4 planches déclassées dans un lot de 10 est $0,218$.
2. Pour calculer la probabilité $p(X \geqslant 1)$ qu'au moins une planche du lot soit déclassée, on passe par l'événement contraire : « aucune planche n'est déclassée » :
   $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1-(1-0,32)^{10} \approx 0,979$.

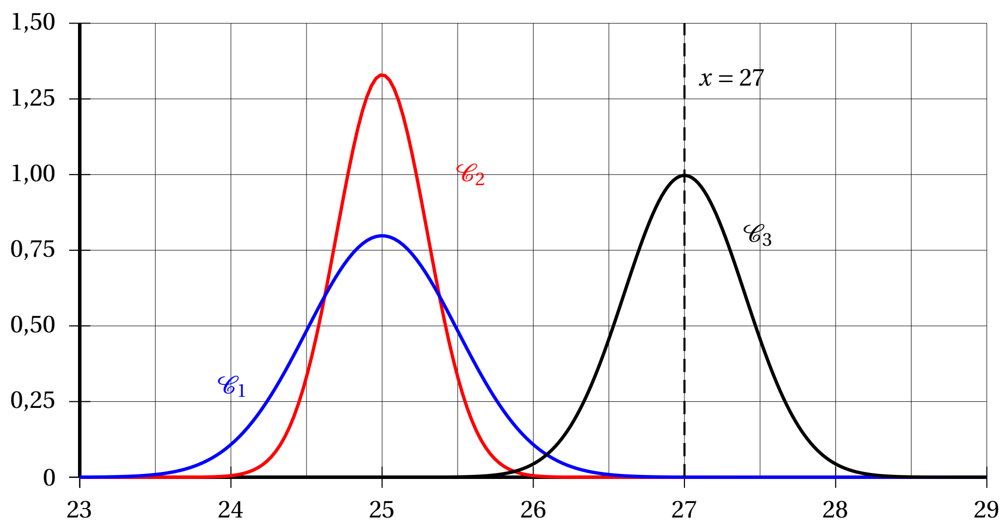
Partie C

L'épaisseur en millimètre d'une planche de sapin est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu_S = 27$ et d'écart type $\sigma_S = 0,4$.

L'épaisseur en millimètre d'une planche de chêne est modélisée par une variable aléatoire Z qui suit la loi normale d'espérance $\mu_C = 25$ et d'écart type σ_C.

On sait de plus que $\sigma_C > \sigma_S$.

1. D'après la calculatrice, $p(26,5 \leqslant Y \leqslant 27,5) \approx 0,789$.
2. Parmi les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ci-dessous, l'une représente la densité de probabilité de Y, une autre celle de Z.



   a. Une fonction de densité d'une loi normale a une courbe symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, donc la courbe qui convient pour Y est $\mathscr{C}_3$.
   b. En comparant les allures des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ à $\mathscr{C}_3$, on peut dire que la courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à une loi dont l'écart-type est supérieur à σ_S, tandis que la courbe $\mathscr{C}_2$ correspond à une loi dont l'écart-type est inférieur à σ_S. Comme on sait que $\sigma_C > \sigma_S$, on peut dire que la courbe qui convient pour la loi Z est $\mathscr{C}_1$.

3. On sait que la probabilité qu'une planche de chêne ait une épaisseur comprise entre 24 mm et 26 mm est égale à environ 0,95, c'est-à-dire $p(24 \leqslant Z \leqslant 26) \approx 0,95$.

On sait que pour toute loi normale Z, $p(\mu - 2\sigma \leqslant Z \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$; or $\mu_C = 0,25$, donc $p(0,25 - 2\sigma \leqslant Z \leqslant 0,25 + 2\sigma) \approx 0,95$.

On sait que $p(24 \leqslant Z \leqslant 26) \approx 0,95$, donc $p(25 - 1 \leqslant Z \leqslant 25 + 1) \approx 0,95$.

On peut donc estimer que $2\sigma_C = 1$ donc que $\sigma_C = 0,5$.

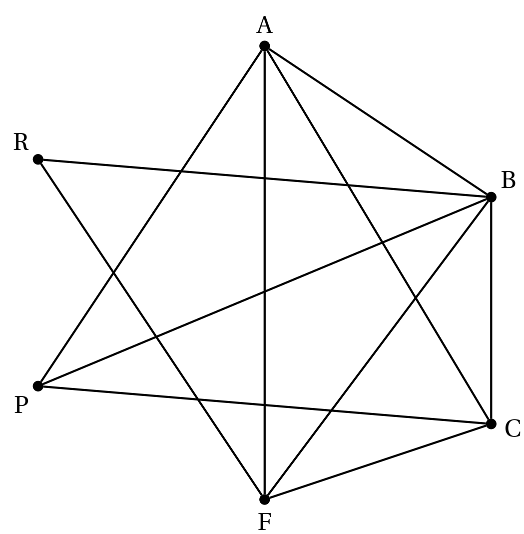
Exercice 3 **5 points**

Candidats de ES ayant suivi la spécialité ou candidats de L

L'organisatrice d'une course à pied dans la ville de Berlin voudrait faire passer les participants par les lieux suivants :

- Alexanderplatz (A)
- Porte de Brandebourg (B)
- Checkpoint Charlie (C)
- Fleamarket (F)
- Musée de Pergame (P)
- Reichstag (R)

On peut résumer la situation par le graphe ci-dessous :



Les lieux sont représentés par les sommets, et les rues ouvertes à la course par les arêtes.

1. **a.** Il y a 6 sommets donc ce graphe est d'ordre 6.

b. Il n'y a pas d'arête reliant A et R donc ce graphe n'est pas complet.

c. Deux sommets quelconques peuvent être reliés par un chemin, donc ce graphe est connexe. Par exemple, le chemin A – B – P – C – F – R relie entre eux tous les sommets.

2. **a.** On cherche le degré de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	F	P	R
Degré	4	5	4	4	3	2

Il y exactement deux sommets de degrés impairs, B et P, donc, d'après le théorème d'Euler, il existe un chemin passant par tous les lieux en empruntant une seule fois chacune des rues ; ce chemin part de B et se termine en P, ou part de P et se termine en B ;

Par exemple : B – A – C – B – F – R – B – P – A – F – C – P.

b. Pour envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues, et dont le départ et l'arrivée se font au même endroit, il faudrait que tous les sommets soient de degrés pairs, ce qui n'est pas le cas.
Un tel parcours n'existe donc pas.

3. La matrice d'adjacence de ce graphe est une matrice carrée d'ordre 6 ne contenant que des 0 et des 1; on met un 1 à l'intersection de la ligne correspondant à un sommet X et à la colonne correspondant à un sommet Y si, dans le graphe, il y a une arête reliant X à Y. On met 0 sinon.

La matrice d'adjacence M de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On admet que :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 11 & 12 & 10 & 5 \\ 13 & 12 & 13 & 12 & 11 & 8 \\ 11 & 13 & 10 & 12 & 10 & 5 \\ 12 & 12 & 12 & 8 & 7 & 7 \\ 10 & 11 & 10 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 5 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

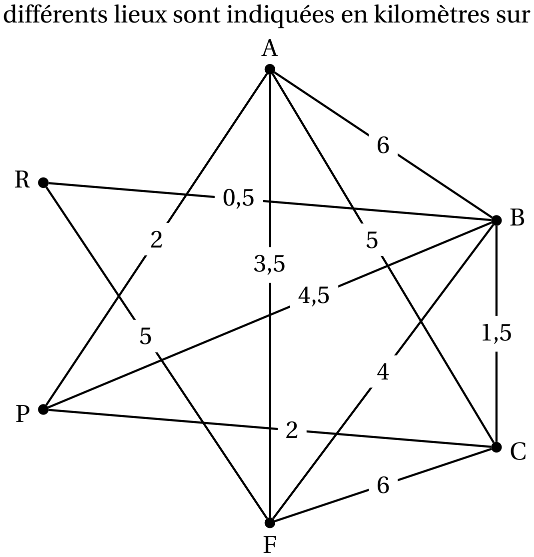
Alexanderplatz correspond au 1^{er} sommet A, et le Reichstag correspond au 6^{e} sommet R.

Le nombre situé à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 6 (ou de la ligne 6 et de la colonne 1) dans la matrice M^3 est 5; donc il y a 5 chemins de longueur 3 reliant A à R; ce sont :

A – B – F – R; A – C – F – R; A – C – B – R; A – F – B – R et A – P – B – R.

5. L'organisatrice veut également prévoir un autre parcours pour les coureurs moins expérimentés. Ce parcours doit débuter à Alexanderplatz et se terminer au Reichstag.

Les distances entre les différents lieux sont indiquées en kilomètres sur le graphe ci-dessous.



En utilisant l'algorithme de Dijkstra, on détermine le parcours le plus court pour aller d'Alexanderplatz au Reichstag.

A	B	C	F	P	R	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	A
	~~∞~~ 6 A	~~∞~~ 5 A	~~∞~~ 3,5 A	∞	∞	F
	6 A ~~10 F~~	5 A ~~9,5 F~~		∞	~~∞~~ 8,5 F	C
	6 A ~~6,5 C~~			~~∞~~ 7 C	8,5 F	B
				7 C ~~10,5 B~~	8,5 F 6,5 B	R

Le trajet le plus court de A à R est : A $\xrightarrow{6}$ B $\xrightarrow{0,5}$ R ; sa longueur est de 6,5 km.

Exercice 4 **5 points**

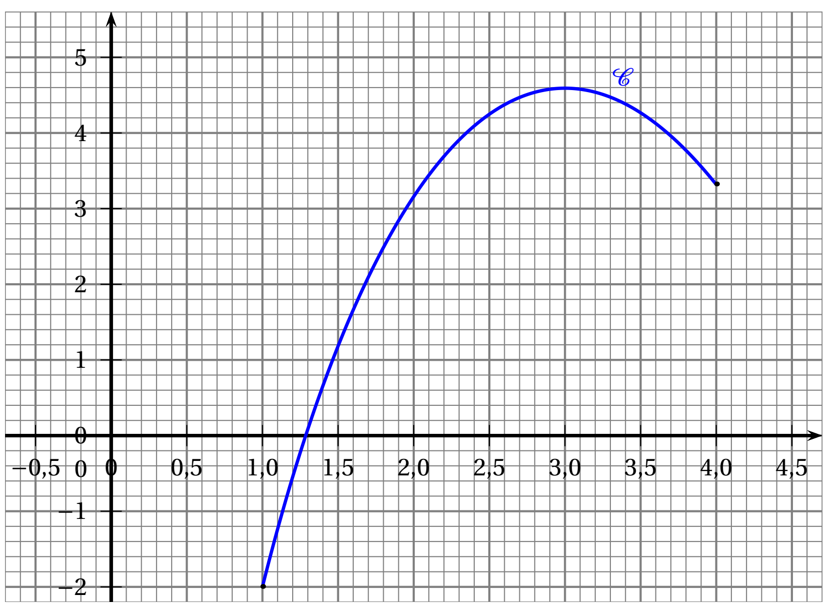
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[1\,;4]$, définie par :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 5 + 6\ln(x).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de cette fonction est donnée dans le repère ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[1\,;4]$.

a. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;4]$, on a : $f'(x) = -2x + 4 + \dfrac{6}{x} = \dfrac{-2x^2 + 4x + 6}{x}$.

b. Sur l'intervalle $[1\,;4]$, $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 4x + 6$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 64 = 8^2$

Le trinôme $-2x^2+4x+6$ a deux racines :
$x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-8}{2\times(-2)} = 3$ et $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+8}{2\times(-2)} = -1 \notin [1\ ;\ 4]$.
Le trinôme $-2x^2+4x+6$ est du signe de $a=-2$ donc négatif à l'extérieur des racines.
D'où le signe de $f'(x)$:

x	1		3		4
$-2x^2+4x+6$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. $f(1)=-2$, $f(3)=-2+6\ln(3)\approx 4,592$ et $f(4)=-5+6\ln(4)\approx 3,318$
On établit le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1\,;4]$:

x	1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$4,592$	$\searrow$	$3,318$

2. **a.** On place la valeur 0 dans le tableau de variation de f :

x	1		α		3		4
$f(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$4,592$	$\searrow$	$3,318$

Cela prouve que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;4]$ et que cette solution est dans $[1\,;3]$.
À la calculatrice, on trouve que $f(1,28)\approx -0,037<0$ et $f(1,29)\approx 0,024>0$ donc $\alpha\in[1,28\ ;\ 1,29]$.

b. On en déduit le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;4]$:

x	1		α		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants, qu'on admettra dans la suite :

1	Dériver((-2x ^2+ 4x + 6) / x) $-2-\dfrac{6}{x^2}$
2	Dériver(- x ^3 / 3 + 2x^2-11x + 6x ln (x)) $-x^2+4x-5+6\ln(x)$

a. Le premier résultat fourni par le logiciel donne la dérivée seconde $f''(x) = -2 - \dfrac{6}{x^2}$.

Pour tout x de $[1\,;4]$, $-2 - \dfrac{6}{x^2} < 0$ donc $f''(x) < 0$.

On en déduit que la fonction f est concave sur $[1\,;4]$, donc sur cet intervalle, la courbe $\mathscr{C}$ est située en-dessous de toutes ses tangentes.

b. Le deuxième résultat fourni par le logiciel indique que la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 11x + 6x\ln(x)$ est une primitive de la fonction f sur $[1\,;4]$.

$I = \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(1) = \left(-\dfrac{64}{3} + 32 - 44 + 24\ln(4)\right) - \left(-\dfrac{1}{3} + 2 - 11 + 6\ln(1)\right)$

$= -\dfrac{64}{3} - 12 + 24\ln(4) + \dfrac{1}{3} + 9 = 24\ln(4) - 24 \approx 9,271$

Partie B

Chaque mois, un prothésiste dentaire produit entre 100 et 400 prothèses.

On admet que lorsque x centaines de prothèses sont fabriquées (avec $1 \leqslant x \leqslant 4$), le bénéfice, en millier d'euros, est donné par $f(x)$, où f est la fonction définie à la partie A.

1. $f(x)$ est maximale et vaut environ $4,592$ pour $x = 3$; il faut donc 300 prothèses pour réaliser un bénéfice maximum qui est alors de 4 592 euros.
2. $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$ et $\alpha \in [1,28\,;1,29]$, donc pour obtenir un bénéfice positif, il faut fabriquer au moins 129 prothèses.
3. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;4]$ est : $\dfrac{1}{4-1}\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \dfrac{9,271}{3} \approx 3,090$.

   Le bénéfice moyen mensuel est donc de 3 090 euros.