Corrigé du baccalauréat ES/L Liban 27 mai 2015

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 1].

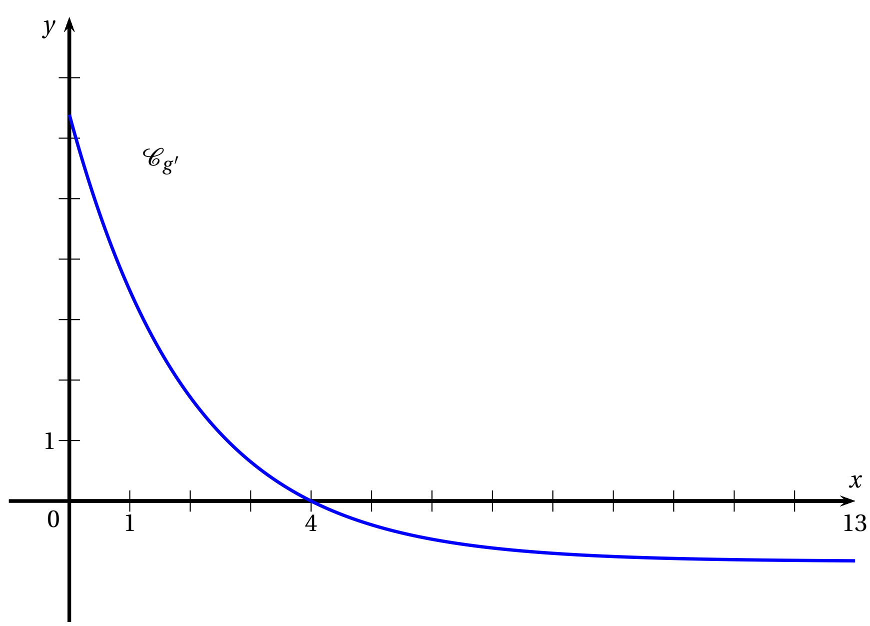
x	-3		-1		0	α		1
Variations de f	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	0	$\nearrow$	4

- Sur l'intervalle [-3 ; 0], f admet un maximum -1 qui est atteint pour $x = -1$, $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cette intervalle.
- Sur l'intervalle $[0 ; 1]$, f est continue et strictement croissante de plus 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de la fonction $f(x) = 0$ admet une solution unique sur cet intervalle. On l'appellera α.

En conséquence, $f(x) = 0$ admet une solution unique sur [-3 ; 1].

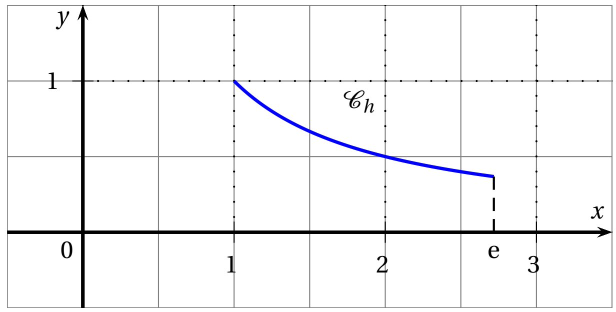
La proposition 1 est donc vraie.

2. Par lecture graphique : $g'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$, la fonction g est donc croissante sur cet intervalle.
La proposition 2 est fausse.



Comme g' est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 13]$, g est concave sur cet intervalle,
la proposition 3 est donc vraie.

3. On a :

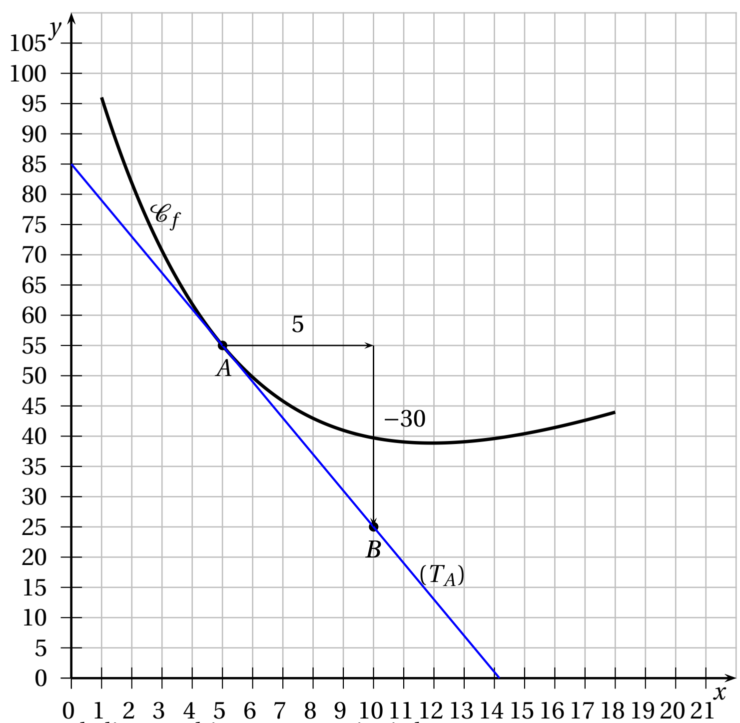


- $h(x) \geqslant 0$
- h est continue sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.
- une primitive de h vaut : $H(x) = \ln x$. Et $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [H(x)]_1^{\mathrm{e}} = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1$

La fonction h est bien une fonction de densité.
La proposition 4 est donc vraie.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** $f'(5)$ correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse A, c'est donc le coefficient directeur de la droite (AB).



Nous pouvons le lire graphiquement, voir ci-dessus.
Nous pouvons le calculer, $A(5\,;\,55)$ et $B(10\,;\,25)$, le coefficient directeur de la droite (AB) vaut :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{25-55}{10-5} = -\frac{30}{5} = -6.$$

b. f est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1\,;\,18]$.

$$f'(x) = 2 + 40 \times \underbrace{(-0,2)}_{u'} \times \text{e}^{\overbrace{-0,2x+1}^{u}} = 2 - 8\text{e}^{-0,2x+1}$$

c. $f'(5) = 2 - 8\text{e}^{-0,2\times5+1} = 2 - 8\text{e}^{0} = 2 - 8 = -6$, on retrouve bien le résultat de la partie **1.a.**.

2. **a.** Ici, nous travaillons avec des expressions qui sont définies sur tout $\mathbb{R}$, les équivalences seront toujours vraies.

$$\begin{aligned}
2 - 8\text{e}^{-0,2x+1} \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -8\text{e}^{-0,2x+1} \geqslant -2\\
&\Leftrightarrow \quad \text{e}^{-0,2x+1} \leqslant \frac{-2}{-8}\\
&\Leftrightarrow \quad \ln \text{e}^{-0,2x+1} \leqslant \ln\frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad -0,2x+1 \leqslant -\ln 4\\
&\Leftrightarrow \quad -0,2x \leqslant -\ln 4 - 1\\
&\Leftrightarrow \quad -5 \times (-0,2x) \geqslant -5 \times (-\ln 4 - 1)\\
&\Leftrightarrow \quad x \geqslant 5\ln 4 + 5)
\end{aligned}$$

b. Dans un premier temps, on constate que : $5\ln 4 + 5 \approx 11,93$ qui est bien compris dans $[1\,;\,18]$.

x	1		$5\ln 4+5$		18
$2-8\text{e}^{-0,2x+1}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$f(1)$	$\searrow$	$f(5\ln 4+5)$	$\nearrow$	$f(18)$

Et : $f(5\ln 4+5) \approx 38,86$, $f(1) \approx 96,02$ et $f(18) \approx 43,97$.

3. Par le calcul, le nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal est à choisir parmi $f(11) \approx 39,05$ ou $f(12) \approx 38,86$, le coût sera donc minimal pour 12 parasols.

4. **a.** Il suffit de dériver F,
$F'(x) = 2x + 5 - 200\text{e}^{-0,2x+1} \times (-0,2) = 2x + 5 + 40\text{e}^{-0,2x+1} = f(x)$.
F est bien une primitive de f.

b. $I = \displaystyle\int_5^{15} f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_5^{15} = F(15) - F(5) = 15^2 + 5\times15 - 200\text{e}^{-3+1} - \left(5^2 + 5\times5 - 200\text{e}^{-1+1}\right)$
$= 300 - 200\text{e}^{-2} - (-150) = 450 - 200\text{e}^{-2}$

c. Rappel : la valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ vaut :$\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\text{d}x$.

ici : $\dfrac{1}{10}\,I = \dfrac{1}{15-5}\displaystyle\int_5^{15} f(x)\,\text{d}x$.

C'est le calcul de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[5\,;\,15]$ et cette valeur moyenne vaut :

$$45 - 20\mathrm{e}^{-2} \approx 42,29$$

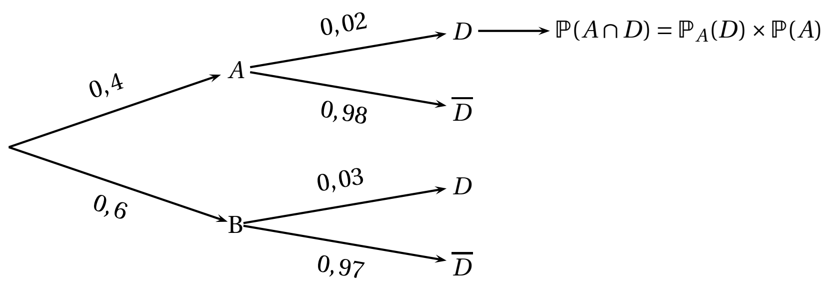
C'est le coût de production unitaire moyen.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** Voici l'arbre de probabilité :



b. Nous utilisons la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D)$
$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(D)$
$\mathbb{P}(D) = 0,4 \times 0,02 + 0,6 \times 0,03$
$\mathbb{P}(D) = 0,026$.

c. $\mathbb{P}_D(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \dfrac{0,4 \times 0,02}{0,026} \approx 0,308$

2. **a.** Nous sommes dans le cas d'une expérience de Bernoulli (on a affaire à une médaille défectueuse ou non).
Nous répétons cette expérience de manière indépendante avec remise, nous sommes dans le cas d'un schéma de Bernoulli.
Comme X est une variable aléatoire comptant le nombre de médaille défectueuse, nous pouvons assimiler cette loi à une loi binomiale : $X = \mathscr{B}(n, p)$, où $n = 20$ et $p = 0,026$.

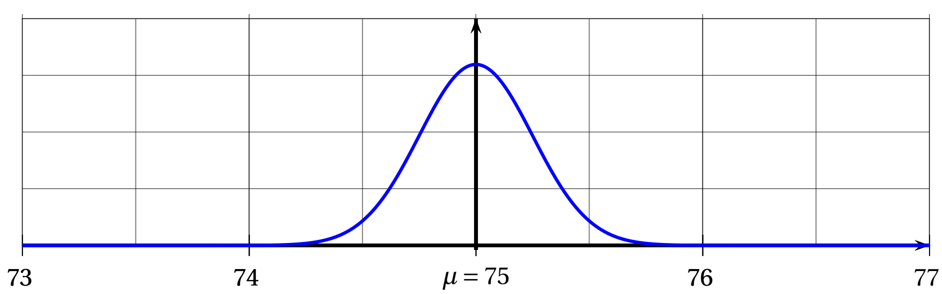
b. Ici nous calculons :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \binom{20}{0} 0,026^0 \times (1 - 0,026)^{20} + \binom{20}{1} 0,026^1 \times (1 - 0,026)^{19} \approx 0,906$$

Ou encore :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 1) = \text{BinomFrep}(20, 0.026, 1) \approx 0,906$$

Partie B



1. Nous pouvons lire : $\mu = 75$.
2. $\mathbb{P}(74,4 \leqslant Y \leqslant 75,6) = \text{NormalFrep}(74.4, 75,6, 75, 0.25) \approx 0,984$.
3. Le résultat de cours est : $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$,
ici $h = 2\sigma = 0,50$.

Partie C

1. La fréquence de médaille défectueuse est de : $f = \dfrac{11}{180} \approx 0,061$.
2. X_n suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. la variable $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ représente la fréquence de médaille défectueuse. La proportion de médaille défectueuse de l'échantillon de taille n est p. Ici : $n = 180$ et $n \geqslant 30$, $n \times p = 180 \times 0,03 = 5,4 \geqslant 5$ et $n \times (1 - p) = 180 \times 0,97 = 174,6 \geqslant 5$
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% vaut :
$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$
Ici : $p = 0,03$ et $n = 180$.
$$I \approx [0,00507895133\ ;\ 0,0549210487]$$
Or : $f \notin I$, le résultat de la question précédente rend pertinente la prise de décision d'arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

La situation peut être modélisée par une suite (u_n).
Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $u_0 = 100\,000$.
Pour tout entier naturel n supérieur à 0, u_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.

1. **a.** Volume d'eau u_1 au matin du 2 juillet 2013 :
$$u_0 = 100\,000 \overbrace{\longrightarrow}^{-4\%} 0,96 \times 100\,000 = 96\,000 \overbrace{\longrightarrow}^{-500} 96\,000 - 500 = 95\,500 = u_1$$
b. Volume d'eau u_2, au matin du 3 juillet 2013 :
$$u_1 = 95\,500 \overbrace{\longrightarrow}^{-4\%} 0,96 \times 95\,500 = 91\,680 \overbrace{\longrightarrow}^{-500} 91\,680 - 500 = 91\,180 = u_2$$
c. Pour tout entier naturel n
$$u_n \overbrace{\longrightarrow}^{-4\%} 0,96 \times u_n \overbrace{\longrightarrow}^{-500} 0,96u_n - 500 = u_{n+1}$$
Ainsi, $u_{n+1} = 0,96u_n - 500$.
2. Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

Variables :	u est un nombre réel
	n est un entier naturel
Traitement :	Affecter à u la valeur 100 000
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $u > 0$
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Affecter à u la valeur $0,96 * u - 500$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 12500 \iff u_n = v_n - 12500$.

a. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 12500 = 0,96u_n - 500 + 12500 = 0,96u_n + 12000 = 0,96(u_n + 12500) = 0,96 \times v_n$$

$$v_0 = u_0 + 12500 = 100000 + 12500 = 112500$$

b. Ainsi : $v_n = 112500 \times (0,96)^n$.

c. Donc :

$$v_n = u_n + 12500 \Leftrightarrow u_n = v_n - 12500 = 112500 \times 0,96^n - 12500$$

4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112500 \times 0,96^n - 12500 \leqslant 0$:

$$\begin{aligned} 112500 \times 0,96^n - 12500 \leqslant 0 &\Leftrightarrow 112500 \times 0,96^n \leqslant 12500 \\ &\Leftrightarrow 0,96^n \leqslant \frac{12500}{112500} \simeq 0,111 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0,96^n\right) = n \ln 0,96 \leqslant \ln \frac{12500}{112500} \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln \dfrac{12500}{112500}}{\ln 0,96} \simeq 53.825 \end{aligned}$$

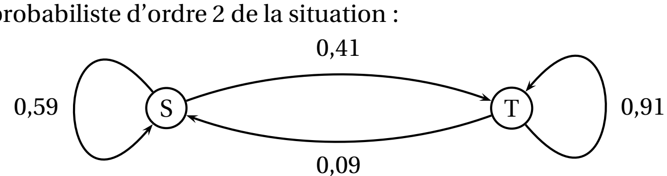
b. Au matin du 54^e jour, il n'y aura plus d'eau dans le bassin.

Exercice 4 — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Voici le graphe probabiliste d'ordre 2 de la situation :



2. L'état stable P vérifie : $P = PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,59\,a + 0,09\,b & 0,41\,a + 0,91\,b \end{pmatrix}$

Deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$\begin{cases} a = 0,59a + 0,09b \\ b = 0,41a + 0,91b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -0,41a + 0,09b \\ 0 = 0,41a - 0,09b \end{cases}$

Une des deux lignes peut être éliminée et comme $a + b = 1$, on en déduit :

$\begin{cases} 0,41a - 0,09b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{cases}.$

3. Comme tous les coefficients de M sont différents de 0, P_n va converger vers P. L'opérateur TECIM va bien atteindre son objectif, en effet a_n et b_n vont converger vers $a = 0,18$ et $b = 0,82$.
82% des clients vont aller chez TECIM.
L'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80%.

Partie B

1. La répartition des clients au bout de 2 ans est donnée par :

$$P_2 = P_0 \times M^2 = (0,35 \ \ 0,65) \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,2225 & 0,7775 \end{pmatrix}$$

Au bout de deux ans, 22,25% des clients seront chez SAFIR et 77,75% chez TECIM.

2. $p_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow (s_{n+1} \quad t_{n+1}) = (0,59s_n + 0,09t_n \quad 0,41s_n + 0,91t_n)$
Deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux :
Ainsi : $t_{n+1} = 0,41s_n + 0,91t_n$
Or : $s_n + t_n = 1 \Leftrightarrow s_n = 1 - t_n$
On en déduit que : $t_{n+1} = 0,41(1 - t_n) + 0,91t_n \Leftrightarrow t_{n+1} = 0,41 + 0,5t_n$.

3. Voici le tableau complété :

L1	**Variables :**	T est un nombre
L2		N est un nombre entier
L3	**Traitement :**	Affecter à T la valeur 0,65
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $T < 0,80$
L6		Affecter à T la valeur $0,5 * T + 0,41$
L7		Affecter à N la valeur $N + 1$
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher N

4. a. $u_{n+1} = t_{n+1} - 0,82$
$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,41 + 0,5t_n - 0,82$
$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5t_n - 0,41$
$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5(t_n - 0,82)$
$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5u_n$
La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$.

b. Le terme général de (u_n) vaut : $u_n = u_0 \times q^n$.
Or : $u_0 = t_0 - 0,82 = 0,65 - 0,82 = -0,17$.
Ainsi : $u_n = -0,17 \times 0,5^n$.
Comme : $t_n = u_n + 0,82$
On conclut que : $t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$.

c. On pourrait utiliser l'algorithme, ou passer par les logarithmes :

$$\begin{array}{rcl}
t_n & \geqslant & 0,80\\
-0,17\times 0,5^n+0,82 & \geqslant & 0,80\\
-0,17\times 0,5^n & \geqslant & -0,02\\
0,5^n & \leqslant & \dfrac{0,02}{0,17}\\
\ln(0,5^n) & \leqslant & \ln\left(\dfrac{0,02}{0,17}\right)\\
n\ln 0,5 & \leqslant & \ln\left(\dfrac{0,02}{0,17}\right)\\
n & \geqslant & \ln\left(\dfrac{0,02}{0,17}\right)\div\ln 0,5 \quad \text{(en effet : } \ln 0,5<0)\\
n & \geqslant & 3,08746284\\
n & \geqslant & 4
\end{array}$$

d. Au bout de 4 ans le nombre de client de TECIM sera supérieur ou égal à 80%.