Corrigé du baccalauréat Terminale ES/L – Asie - 20 juin 2019

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit X la variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}4)$.

a. $p(X=7)=20\times 0{,}4^7$

b. $p(X>4)=0{,}98$ arrondie au centième

c. $\boxed{p(X\leqslant 4)=0{,}05 \text{ arrondie au centième}}$

d. $p(X\leqslant 7)=0{,}25$ arrondie au centième

> À la calculatrice on trouve $p(X\leqslant 4)\approx 0{,}05095$.

2. L'équation $(\mathrm{e}^{x})^2=3\,\mathrm{e}^{x}$ possède :

a. une unique solution 3

b. $\boxed{\text{une unique solution } \ln(3)}$

c. deux solutions 0 et $\ln(3)$

d. deux solutions 0 et 3

> $(\mathrm{e}^{x})^2=3\,\mathrm{e}^{x} \iff \mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}-3)=0 \iff \mathrm{e}^{x}-3=0 \iff \mathrm{e}^{x}=3 \iff x=\ln(3)$ car $\mathrm{e}^{x}>0$ pour tout x.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$.
Une autre expression de $f(x)$ est :

a. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{-x}$

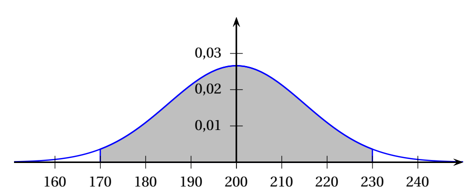
b. $f(x)=-x\,\mathrm{e}^{-x}$

c. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$

d. $\boxed{f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}}$

> $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}=\mathrm{e}^{-x}$ donc $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}=x\,\mathrm{e}^{-x}$.

4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale dont la densité de probabilité est représentée ci-contre. Sur le graphique, la surface grisée correspond à une probabilité de 0,95.



Une valeur approchée à 0,1 près du nombre α tel que $p(X\geqslant\alpha)=0{,}1$ est :

a. $\alpha\approx 180{,}8$

b. $\alpha\approx 212{,}6$

c. $\boxed{\alpha\approx 219{,}2}$

d. $\alpha\approx 238{,}4$

> D'après le graphique, on peut dire que $\mu=200$.
> Comme on sait que $p(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0{,}95$ et que la surface grisée correspond à une probabilité de $p(170\leqslant X\leqslant 230)=0{,}95$, on peut en déduire que $\sigma\approx 15$.
> On sait que $p(X\geqslant\alpha)=0{,}1$ équivaut à $p(X\leqslant\alpha)=0{,}9$.
> Pour X suivant la loi normale de paramètres $\mu=200$ et $\sigma=15$, on trouve à la calculatrice que le nombre α tel que $p(X\leqslant\alpha)=0{,}9$ vaut environ 219,2.

Exercice 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Un club de football est composé d'équipes adultes masculines, adultes féminines et d'équipes d'enfants. Chaque week-end, la présidente Claire assiste au match d'une seule des équipes du club et elle suit :

- dans 10 % des cas, le match d'une équipe adulte féminine ;
- dans 40 % des cas, le match d'une équipe adulte masculine ;
- dans les autres cas, le match d'une équipe d'enfants.

Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe masculine, la probabilité que celle-ci gagne est 0,6. Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe d'enfants, la probabilité que celle-ci gagne est 0,54.
La probabilité que Claire voie l'équipe de son club gagner est 0,58.
On choisit un week-end au hasard. On note les événements suivants :

- F : « Claire assiste au match d'une équipe féminine » ;
- M : « Claire assiste au match d'une équipe masculine » ;
- E : « Claire assiste au match d'une équipe d'enfants » ;
- G : « l'équipe du club de Claire gagne le match ».

1. Voir l'arbre de probabilité en **annexe 1**.
2. $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$
3. **a.** D'après la formule des probabilités totales : $p(G) = p(F \cap G) + p(M \cap G) + p(E \cap G)$.
   On sait que $p(G) = 0{,}58$ et que $p(M \cap G) = 0{,}24$.
   $p(E \cap G) = p(E) \times p_E(G) = 0{,}5 \times 0{,}54 = 0{,}27$
   On en déduit que $p(F \cap G) = p(G) - p(M \cap G) - p(E \cap G) = 0{,}58 - 0{,}24 - 0{,}27 = 0{,}07$.

   b. $p(F \cap G) = p(F) \times p_F(G)$ donc $p_F(G) = \dfrac{p(F \cap G)}{p(F)} = \dfrac{0{,}07}{0{,}1} = 0{,}7$.
   On peut ainsi compléter l'arbre (voir **annexe 1**).

   c. La probabilité que l'équipe adulte féminine gagne un match est 0,47.
   La probabilité que l'équipe féminine gagne un match sachant que Claire a assisté au match est $p_F(G) = 0{,}7$.
   Donc la présence de Claire semble favoriser la victoire de l'équipe féminine.
4. Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe de club. La probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte féminine est $p_G(F) = \dfrac{p(F \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0{,}07}{0{,}58} \approx 0{,}12$.

Partie B

Au guichet, un supporter attend pour acheter son billet. On modélise le temps d'attente en minute par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. Le temps d'attente moyen d'un supporter est μ soit 30 minutes.
2. Le supporter ne dispose que de 15 minutes avant le début du match pour acheter son billet.
   La probabilité qu'il puisse acheter son billet avant le début du match est $p(X \leqslant 15) \approx 0{,}07$.

Partie C

Des études statistiques ont montré que la probabilité qu'un enfant se réinscrive d'une année sur l'autre dans le même club de football est 0,6.

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion d'enfants se réinscrivant d'une année sur l'autre pour un échantillon de 7 enfants pris au hasard dans le même club de football est :
$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}6 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}{\sqrt{75}}\ ;\ 0{,}6 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}{\sqrt{75}}\right]$$
$$\approx [0{,}49\ ;\ 0{,}71]$$
2. 52 des 75 enfants du club de Claire veulent se réinscrire en septembre 2018, ce qui fait une proportion de $f = \dfrac{52}{75} \approx 0{,}69$.
On voit que $f \in I$ donc on ne peut pas dire que la victoire de la France aux championnats du monde en 2018 a eu un effet sur les réinscriptions en septembre 2018 dans ce club.

Exercice 3 **5 points**
Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité et candidats de L

Partie A

Tous les ans, au mois de septembre, Richard prélève 8,5 tonnes d'algues sur les plages de sa commune. Au 1er septembre 2018, il y avait 230 tonnes d'algues sur ces plages. Tous les ans, entre le 1er octobre et le 1er septembre suivant, la quantité d'algues sur ces plages augmente de 4 %.
On note u_n la quantité en tonnes d'algues présente sur les plages au 1er septembre de l'année $2018+n$.
Ainsi, $u_0 = 230$.

1. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}04\,u_n - 8{,}84$.
Le tonnage d'algues au 1er septembre 2018 est $u_1 = 1{,}04u_0 - 8{,}84 = 1{,}04\times 230 - 8{,}84 = 230{,}36$.
2. Soit (v_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 221$. On a donc $u_n = v_n + 211$.
   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 221 = 1{,}04u_n - 8.84 - 221 = 1{,}04\,(v_n + 221) - 229{,}84 = 1{,}04v_n + 229{,}84 - 229{,}84$
   $= 1{,}04\,v_n$
   $v_0 = u_0 - 221 = 230 - 221 = 9$
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}04$ et de premier terme $v_0 = 9$.
   b. On en déduit que, pour tout n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 9\times 1{,}04^n$.
   c. Comme $u_n = v_n + 221$, on déduit que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 221 + 9\times 1{,}04^n$.
3. 'Pour savoir si la quantité d'algues présentes sur ces plages dépassera un jour 250 tonnes, on résout l'inéquation $u_n > 250$
$$u_n > 250 \iff 221 + 9\times 1{,}04^n > 250 \iff 9\times 1{,}04^n > 29 \iff 1{,}04^n > \frac{29}{9}$$
$$\iff \ln(1{,}04^n) > \ln\left(\frac{29}{9}\right) \iff n\ln(1{,}04) > \ln\left(\frac{29}{9}\right) \iff n > \frac{\ln\left(\frac{29}{9}\right)}{\ln(1{,}04)}$$
$\dfrac{\ln\left(\frac{29}{9}\right)}{\ln(1{,}04)} \approx 29{,}8$ donc c'est au bout de 30 ans que la quantité d'algues dépassera 250 tonnes.

Partie B

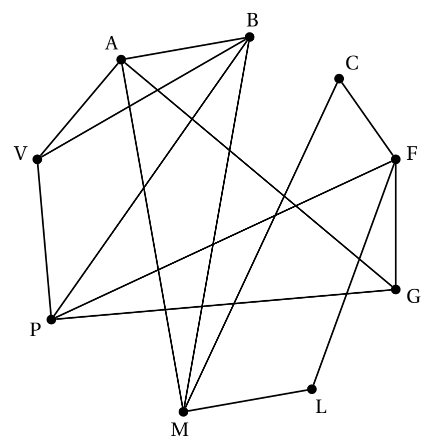
Pour développer son entreprise, à partir du 1er septembre 2019, Richard a besoin de 10 % d'algues de plus que l'année précédente. On rappelle qu'au 1er septembre 2018, il disposait de 230 tonnes d'algues et qu'il en avait consommé 8,5 tonnes en septembre 2018. Dans cette nouvelle situation, il disposera de 230,36 tonnes d'algues au 1er septembre 2019 et en utilisera 9,35 tonnes pendant ce mois. Richard souhaite étudier la quantité d'algues sur les plages concernées pour les 16 prochaines années selon ce modèle.
Pour cela il rédige l'algorithme ci-contre.

$A \leftarrow 230$
$B \leftarrow 8{,}5$
Pour K allant de 1 à 16
$\quad A \leftarrow (A - B) \times 1{,}04$
$\quad B \leftarrow B \times 1{,}1$
Fin pour

1. La variable A représente le tonnage d'algues disponibles l'année $2018 + n$, et B représente le tonnage d'algues consommées la même année.
2. Voir **annexe 2**.
3. En 2034, il y aura moins d'algues disponibles que ce que veut utiliser Richard car $29{,}75 < 39{,}06$.

Exercice 3 **5 points**
Candidats de ES ayant suivi la spécialité

Une compagnie aérienne a représenté à l'aide d'un graphe les différentes liaisons assurées par ses avions. Les sommets du graphe sont les initiales des aéroports desservis et les arêtes correspondent aux vols effectués par un avion de cette compagnie entre deux aéroports. Par exemple, l'arête entre A et G signifie qu'un avion effectue le vol entre les aéroports A et G, en partant de A vers G ou en partant de G vers A.



1. Il n'y a pas d'arête entre B et C donc le graphe n'est pas complet.

   Cela signifie qu'il n'y a pas de vol direct entre l'aéroport B et l'aéroport C.
2. On note M la matrice d'adjacence du graphe ci-dessus en classant les sommets par ordre alphabétique.

   On complète cette matrice en mettant 0 en ligne i colonne j s'il existe une arête entre les aéroports n° i et n° j. Voir **annexe 2**.
3. La compagnie souhaite qu'un avion partant de l'aéroport F (n° 4) effectue 3 vols avant d'arriver à l'aéroport B (n° 2).

   Il faut donc chercher dans la matrice M^3 le coefficient qui se trouve à la ligne 4 et la colonne 2 ; c'est 5 donc il y a 5 trajets répondant à la question.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 5 & 8 & 2 & 8 & 4 & 9 \\ 9 & 6 & 2 & 5 & 4 & 2 & 8 & 9 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 2 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 2 & 6 & 6 & 2 & 7 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 6 & 2 & 2 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 2 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 2 & 7 & 8 & 2 & 6 & 4 & 8 \\ 9 & 7 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

4. L'entreprise souhaite qu'un même avion puisse parcourir successivement une fois et une seule chaque liaison.

   a. On détermine le degré de chaque sommet du graphe :

Sommet	A	B	C	F	G	L	M	P	V
Degré	4	4	2	4	3	2	4	4	3

   Il y a exactement deux sommets de degrés impairs, G et V, donc, d'après le théorème d'Euler, il existe des trajets qui partent de l'un de ces deux aéroports et qui effectuent toutes les liaisons pour arriver à l'autre.

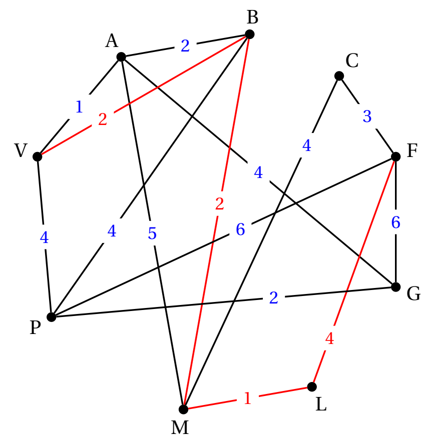
   b. Le sommet P est de degré 4 donc lors de ce trajet l'avion passera 2 fois par le sommet P : cet avion va donc se poser 2 fois sur l'aéroport P.

Partie B

Sur le graphe ci-contre sont indiqués les différents temps de vol en heure entre deux aéroports.

Un client souhaite utiliser une offre promotionnelle de cette compagnie pour voyager de l'aéroport V jusqu'à l'aéroport F.

On détermine le trajet le plus rapide au moyen de l'algorithme de Dijkstra.



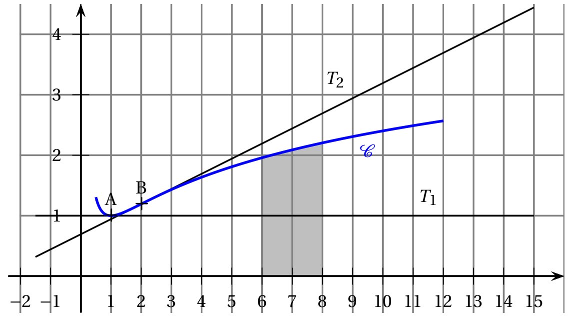
V	A	B	C	F	G	L	M	P	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	V
	~~∞~~ 1 V	~~∞~~ 2 V	∞	∞	∞	∞	∞	~~∞~~ 4 V	A 1
		2 V ~~3 A~~	∞	∞	~~∞~~ 5 A	∞	~~∞~~ 6 A	4 V	B 2
			∞	∞	5 A	∞	~~6 A~~ 4 B	4 V ~~6 B~~	M 4
			~~∞~~ 8 M	∞	5 A	~~∞~~ 5 M		4 V	P 4
			8 M	~~∞~~ 10 P	5 A ~~6 P~~	5 M			G 5
			8 M	10 P ~~11 G~~		5 M			L 5
			8 M	~~10 P~~ 9 L					C 8
				9 L					F 9

Le trajet le plus rapide de V vers F dure 9 heures : $V \xrightarrow{2} B \xrightarrow{2} M \xrightarrow{1} L \xrightarrow{4} F$

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5~;~12]$, la tangente T_1 à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1 et la tangente T_2 à $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 2. La tangente T_1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. **a.** $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A donc $f'(1) = 0$.

   b. La courbe $\mathscr{C}$ semble avoir le point B pour point d'inflexion.

   c. $\displaystyle\int_6^8 f(x)\,\text{d}x$ est l'aire de la surface grisée sur le graphique ; $4 \leqslant \displaystyle\int_6^8 f(x)\,\text{d}x \leqslant 5$.

2. On admet que la fonction f est définie sur $[0{,}5~;~12]$ par : $f(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{x}$.

   a. Pour tout $x \in [0{,}5~;~12]$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$.

   b. Sur $[0{,}5~;~12]$, $f'(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$.
   $f(0{,}5) \approx 1{,}3$, $f(1) = 1$ et $f(12) \approx 2{,}6$
   On construit le tableau des variations de la fonction f :

x	0,5		1		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1,3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2,6

3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants que l'on pourra admettre.

	Calcul formel
1	$g(x) := (x-1)/x^2$ $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$
2	Dérivée $(g(x))$ $\dfrac{x^2-2x(x-1)}{x^4}$
3	Simplifier(Dérivée$(g(x))$ $\dfrac{-x+2}{x^3}$

$g(x) = f'(x)$ donc $f''(x) = g'(x) = \dfrac{-x+2}{x^3}$ d'après le logiciel.

La fonction f est concave sur les intervalles sur lesquels f'' est négative.

Sur $[0{,}5~;~12]$, $f''(x) < 0 \iff \dfrac{-x+2}{x^3} < 0 \iff -x+2 < 0 \iff x > 2$

Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave est $[2~;~12]$.

4. Soit F la fonction définie sur $[0,5\ ;\ 12]$ par $F(x) = (x+1)\ln(x) - x$.

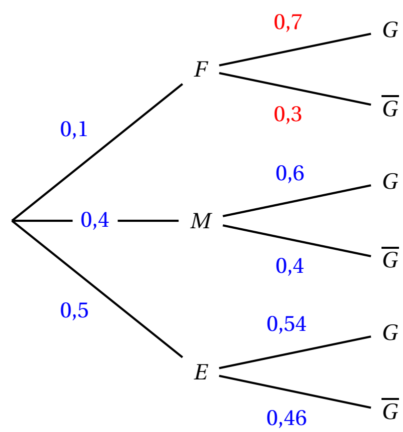
a. Sur $[0,5\ ;\ 12]$, $F'(x) = 1 \times \ln(x) + (x+1) \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + \dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x} = \ln(x) + \dfrac{1}{x} = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0,5\ ;\ 12]$.

b. La valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[6\ ;\ 8]$ est

$$m = \frac{1}{8-6}\int_6^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[F(8) - F(6)\right] = \frac{1}{2}\left[(9\ln(8) - 8) - (7\ln(6) - 6)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[9\ln(8) - 8 - 7\ln(6) + 6\right] = \frac{1}{2}\left[9\ln(8) - 7\ln(6) - 2\right] \approx 2{,}09$$

Annexes à rendre avec la copie

Annexe 1
Exercice 2



Annexe 2
Exercice 3
Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de L
Valeurs de A et B obtenues à l'aide d'un tableur

K	A	B
	230	8,5
1	230,36	9,35
2	229,85	10,29
3	228,35	11,31
4	225,72	12,44
5	221,80	13,69
6	216,44	15,06
7	209,43	16,56
8	200,58	18,22
9	189,66	20,04
10	176,40	22,05
11	160,53	24,25
12	141,73	26,68
13	119,65	29,34
14	93,92	32,28
15	64,11	35,51
16	29,75	39,06

Annexe 2
Exercice 3
Candidats de ES ayant suivi la spécialité

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$