∽ Corrigé du baccalauréat ES Antilles – Guyane ∾
12 septembre 2014

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. **Réponse c** : $\ln(10)+2$
   $\ln\left(10\,\text{e}^2\right)=\ln(10)+\ln\left(\text{e}^2\right)=\ln(10)+2$
2. **Réponse b** : $n \geqslant 13$
   $0{,}7^n \leqslant 0{,}01 \iff \ln\left(0{,}7^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n\ln(0{,}7) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}7)} \iff n \geqslant 13$
3. **Réponse a** : $5\,\text{e}^{5x+2}$
   Formule à utiliser : $\left(\text{e}^u\right)' = u'\,\text{e}^u$
4. **Réponse a** : $\text{e}-2$
   2 est trop grand, 1/4 trop petit et $\ln(1/2)$ négatif
5. **Réponse b** : $y=\text{e}x-1$
   Le coefficient directeur de la tangente doit être positif, et si $x=1$, $f(x)$ est compris entre 1,5 et 2 donc on peut éliminer la réponse **a** car $\text{e}+1\approx 2{,}7$ est trop grand.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Partie A

Une entreprise fabrique des balles de tennis et dispose de trois chaines de fabrication appelées A, B, C.

La chaine A fabrique 30 % de la production totale de l'entreprise.

La chaine B en fabrique 10 %.

La chaine C fabrique le reste de la production.

En sortie de chaines, certaines balles peuvent présenter un défaut.

5 % des balles issues de la chaine A présentent un défaut.

5 % des balles issues de la chaine B présentent un défaut.

4 % des balles issues de la chaine C présentent un défaut.

On choisit au hasard une balle dans la production de l'entreprise et on note les évènements :

A : « la balle provient de la chaine A » ;

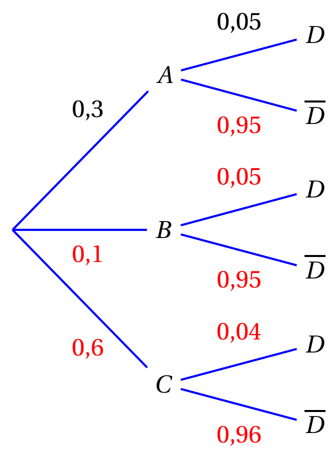
B : « la balle provient de la chaine B » ;

C : « la balle provient de la chaine C » ;

D : « la balle présente un défaut ».

1. L'arbre pondéré de la page 2 résume la situation.
2. L'événement « la balle présente un défaut et provient de la chaine B » se note $B\cap D$.
3. D'après la formule des probabilités totales, $P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap D)=P(A)\times P_A(D)=0{,}3\times 0{,}05=0{,}015\\ P(B\cap D)=P(B)\times P_B(D)=0{,}1\times 0{,}05=0{,}005\\ P(C\cap D)=P(C)\times P_C(D)=0{,}6\times 0{,}04=0{,}024\end{array}\right\}\Longrightarrow p(A)=0{,}015+0{,}005+0{,}024=0{,}044$$



4. La probabilité de A sachant D, $P_D(A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(D)} = \dfrac{0{,}015}{0{,}044} \approx 0{,}341$.

5. On choisit 5 balles au hasard dans la production totale qui est suffisamment importante pour que ce choix puisse être assimilé à cinq tirages indépendants avec remise.
   La variable aléatoire Y qui donne le nombre de balles défectueuses suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}044$ (répétition d'épreuves indépendantes et identiques).
   Si Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $P(Y = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$.
   Donc $P(Y = 3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} 0{,}044^3 (1 - 0{,}044)^{5-3} \approx 0{,}0008$
   La probabilité que 3 balles possèdent un défaut est 0,000 8.

Partie B

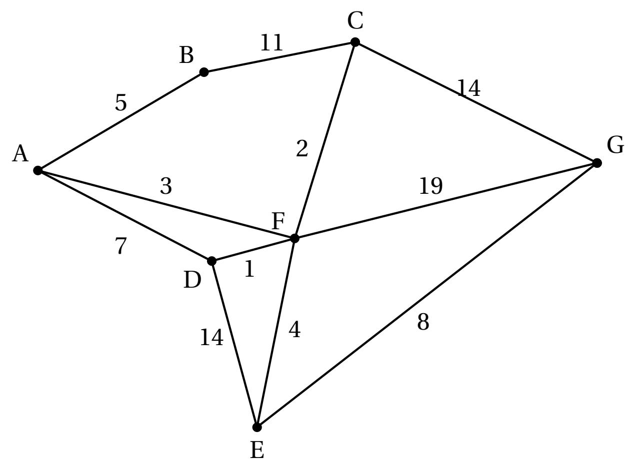
Pour être homologuée par la Fédération Internationale de Tennis, le poids d'une balle de tennis doit être compris entre 56,7 grammes et 58,5 grammes.
On suppose que la variable aléatoire X qui, à une balle choisie au hasard dans la production, associe son poids en gramme, suit la loi normale d'espérance $\mu = 57{,}6$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}3$.

1. La probabilité qu'une balle choisie au hasard soit homologuée est $P(56{,}7 \leqslant X \leqslant 58{,}5)$.
   À la calculatrice on trouve 0,997.
   C'est un résultat connu du cours car $56{,}7 = 57{,}6 - 3 \times 0{,}3 = \mu - 3\sigma$ *et* $58{,}5 = 57{,}6 + 3 \times 0{,}3 = \mu + 3\sigma$.
2. La probabilité qu'une balle choisie au hasard ait un poids supérieur à 58 grammes est $P(X \geqslant 58)$.
   À la calculatrice on trouve 0,091.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le jeu vidéo « Save the princess », l'objectif est d'aller délivrer une princesse tout en récoltant des trésors situés dans les couloirs du château.
Le plan du château est représenté par le graphe pondéré ci-dessous. Les sommets de ce graphe représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs reliant les salles entre elles.



Partie A

1. Le joueur se trouve dans la salle A. Il décide de visiter chacun des couloirs afin de trouver le plus de trésors possibles.

   Trouver un trajet lui permettant de passer par tous les couloirs une et une seule fois c'est vouloir parcourir le graphe en passant une fois et une seule par chaque arête, autrement dit c'est déterminer un cycle eulérien (on part d'un sommet et on arrive au même sommet) ou une chaîne eulérienne (on part d'un sommet et on arrive à un autre).

   D'après le théorème d'Euler, un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degrés pairs, et un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degrés pairs, sauf deux; la chaîne eulérienne part alors d'un des deux sommets de degré impair pour aboutir à l'autre.

   Le graphe proposé a cinq sommets de degré impair : A, C, D, E et G. Il n'admet donc ni cycle ni chemin eulérien; donc le joueur ne peut pas trouver un trajet permettant de passer par tous les couloirs une fois et une seule.

2. Dans chaque couloir se trouve un certain nombre de monstres. Les étiquettes du graphe pondéré donnent le nombre de monstres présents dans les couloirs.

   Le joueur souhaite, en partant de A, rejoindre la princesse enfermée dans la salle G. Le chemin qu'il doit prendre pour délivrer la princesse en combattant le moins de monstres possible correspond au chemin le plus court.

   L'algorithme de Dijkstra va donner tous les chemins les plus courts partant de A :

A	B	C	D	E	F	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	5 (A)	∞	7 (A)	∞	3 (A)	∞	F
	5 (A)	5 (F)	~~7 (A)~~ 4 (F)	7 (F)		22 (F)	D
	5 (A)	5 (F)		7 (F) ~~18 (D)~~		22 (F)	B
		5 (F) ~~16 (B)~~		7 (F)		22 (F)	C
				7 (F)		~~22 (F)~~ 19 (C]	E
						~~19 (C)~~ 15 (E)	G

Le chemin le plus court est : A $\xrightarrow{3}$ F $\xrightarrow{4}$ E $\xrightarrow{8}$ G

Le joueur aura à affronter $3+4+8=15$ monstres.

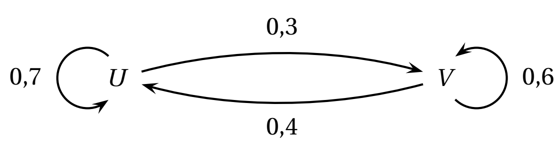
Partie B

Pour un joueur régulier, on estime que :

- s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est 0,7 ;
- s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est 0,6.

On note $P_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste lors de la n-ième partie où u_n désigne la probabilité que la partie soit gagnée et v_n celle que la partie soit perdue.

1. On traduit les données de l'énoncé par un graphe probabiliste en nommant les sommets U (pour la partie gagnée) et V (pour la partie perdue) :



2. D'après le texte, $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 0{,}7u_n + 0{,}4v_n \\ v_{n+1} = 0{,}3u_n + 0{,}6v_n \end{array}\right.$ donc la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

3. On suppose la première partie perdue, l'état probabiliste initial est donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice de transition M vérifie, pour tout $n \geqslant 1$, $P_{n+1} = P_n \times M$.
Donc $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$
$P_3 = P_2 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4\times 0{,}7 + 0{,}6 \times 0{,}4 & 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}6 \times 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \end{pmatrix}$
Donc la probabilité que le joueur gagne la 3$^{\text{e}}$ partie est 0,52.
On peut utiliser la calculatrice pour effectuer ces produits de matrices.

4. D'après le cours, on peut dire que, pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = P_1 \times M^{n-1}$; donc $P_{15} = P_1 \times M^{14}$.
On trouve à la calculatrice que $P_{15} = \begin{pmatrix} 0{,}57 & 0{,}43 \end{pmatrix}$.
Donc la probabilité que le joueur gagne la 15$^{\text{e}}$ partie est 0,53.

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Un producteur de légumes souhaite s'implanter dans une commune et livrer directement chez le consommateur des paniers de 5 kg de légumes variés labélisés « bio ».

Partie A

Avant de se lancer, le producteur fait réaliser un sondage auprès de 2 500 foyers de la commune ; 80 foyers se déclarent intéressés par l'achat d'un panier par mois.
L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion de foyers de la commune susceptibles de passer commande d'un panier mensuel est donné par : $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$
Or $f = \dfrac{80}{2\,500} = 0{,}032$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\,500}} = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$.
Donc $I = [0{,}032 - 0{,}02\,;\, 0{,}032 + 0{,}02] = [0{,}012\,;\, 0{,}052]$.

Pour que l'intervalle de confiance ait une amplitude de 0,02, il faut que la taille n de l'échantillon soit telle que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}02$ ce qui équivaut à $\dfrac{2}{0{,}02} = \sqrt{n} \iff 100 = \sqrt{n} \iff n = 10\,000$.
La taille de l'échantillon doit être de 10 000 pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,02.

La commune compte 15 000 foyers. La condition pour démarrer l'entreprise est de réaliser une recette minimale de 3 500 euros par mois et les paniers seront vendus 20 euros l'un.
D'après l'intervalle de confiance, la proportion de foyers susceptibles de passer commande est au minimum de 0,012 (au seuil d'erreur de 5 %). Sur 15 000 foyers, on peut espérer que $15\,000 \times 0{,}012 = 180$ sont susceptibles de passer commande.
Chacun achetant un panier de 20 euros, cela fait espérer une recette de $180 \times 20 = 3\,600$ euros.
Le producteur peut donc envisager de se lancer.

Partie B

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0\,;\,10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1. $C(x) = -\dfrac{1}{48}x^4 + \dfrac{5}{16}x^3 + 5x + 10$ donc $C'(x) = -\dfrac{4}{48}x^3 + \dfrac{15}{16}x^2 + 5 = -\dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{15}{16}x^2 + 5$
   Donc $C_m(6) = C'(6) = -\dfrac{1}{12}6^3 + \dfrac{15}{16}6^2 + 5 = \dfrac{83}{4} = 20{,}75$
   Le coût marginal pour 600 paniers vendus est donc $C_m(6) = 20{,}75$.
2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a $C''(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{15}{8}x$.
   a. La fonction C est convexe sur un intervalle si et seulement si C'' est positive sur cet intervalle.
   On résout dans $]0\,;\,10]$ l'inéquation $C''(x) \geqslant 0$:
   $-\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{15}{8}x \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{8}x(15 - 2x) \geqslant 0 \iff 15 - 2x \geqslant 0$ (car $x > 0$) $\iff x \leqslant 7{,}5$
   Le plus grand intervalle de la forme $[0\,;\,a]$ dans lequel la fonction C est convexe est $[0\,;\,7{,}5]$.

b. En $x = 7{,}5$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point d'abscisse 7,5 de la courbe représentant C est un point d'inflexion.
Pour $x > 7{,}5$, $C''(x) < 0$ donc le coût marginal C' diminue.

Partie C

On admet que l'entreprise produit entre 0 et 1 000 paniers de légumes (par mois) et que tout ce qui est produit est vendu au prix de 20 euros le panier.
La recette mensuelle R, exprimée en centaines d'euros, ainsi que la fonction C sont représentées par les courbes $\mathscr{C}_R$ et $\mathscr{C}_C$ sur le graphique donné en annexe page 8.

1. Le producteur réalise un bénéfice quand la recette est supérieure au coût, autrement dit quand la courbe $\mathscr{C}_R$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_C$; cela se produit à partir de 70 paniers.
2. Le bénéfice réalisé pour la vente de 500 paniers est de $R(5) - C(5)$ centaines d'euros soit à peu près $40 \times 100 = 4\,000$ euros.
3. Pour réaliser un bénéfice d'au moins 5 000 euros, il faut que l'écart entre R et C soit au moins de 50. En traçant la droite d, parallèle à la droite $\mathscr{C}_R$, il faudrait que la courbe $\mathscr{C}_C$ passe en-dessous de la droite d.
Ce n'est pas le cas donc le producteur ne peut pas espérer un bénéfice supérieur à 5 000 euros.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

En 2008, une entreprise internationale s'est dotée d'un centre de visio-conférence qui permet de réaliser de grandes économies dans le budget « déplacement des cadres ».
Lors d'un conseil d'administration de fin d'année, le responsable du centre de visio-conférence fait le compte rendu suivant : on a observé un fort accroissement de l'utilisation de cette technologie, le nombre de visio-conférences, qui était de 30 en 2008, a augmenté de 20 % tous les ans.

1. On s'intéresse au nombre d'utilisations de la visio-conférence lors de l'année $2008+n$. On modélise la situation par une suite géométrique (u_n) où le terme u_n est une estimation de ce nombre d'utilisations lors de l'année $2008+n$.
   a. Augmenter de 20 %, c'est multiplier par 1,2 donc la raison de la suite (u_n) est $q = 1{,}2$.
   Le nombre de visio-conférences était de 30 en 2008 donc $u_0 = 30$.
   b. D'après le cours, on sait que, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 30 \times 1{,}2^n$.
   c. $2013 = 2008+5$; donc $u_5 = 30 \times 1{,}2^5 \approx 74{,}65 > 74$
   Donc en 2013, on a atteint 74 utilisations de la visio-conférence.
2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel U et A sont des nombres réels
Entrée :	Saisir A

Traitement :	Affecter à U la valeur 30
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $U < A$ faire
	    U prend la valeur $U + U \times 0{,}2$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher n

a. On donne la valeur 100 à A et on fait tourner l'algorithme.

Test $U < A$		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de U	30	36	43	52	62	74	89	107
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7

b. La valeur affichée en sortie de cet algorithme est la dernière valeur de n, soit 7.

c. $n = 7$ correspond à $2008 + 7 = 2015$; donc 2015 est l'année à partir de laquelle le nombre annuel de vidéo-conférences dépassera 100.

3. Le coût de l'installation des appareils de visio-conférence sera amorti quand le nombre total d'utilisations aura dépassé 400.

Le tableau ci-dessous donne le nombre total de vidéo-conférences :

Nombre annuel	30	36	43	52	62	74	89	107
Nombre total	30	66	109	161	223	297	386	493
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015

L'installation sera donc amortie à partir de l'année 2015.

ANNEXE

Exercice 3 Partie C