Corrigé du baccalauréat ES Antilles–Guyane 24 juin 2015

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Aucune justification n'était demandée dans cet exercice.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2$ est convexe sur l'intervalle :

   a. $]-\infty\,;\,+\infty[$ **b.** $[-2\,;\,+\infty[$ **c.** $]-\infty\,;\,-2]$ **d.** $[-6\,;\,+\infty[$

   Réponse b.
   Une fonction deux fois dérivable est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée seconde est positive.
   $f(x) = x^3 + 6x^2 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x \Longrightarrow f''(x) = 6x + 12$; $f''(x) \geqslant 0 \iff x \in [-2\,;+\infty[$

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{x}$. L'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$:

   a. aucune solution **b.** une seule solution
   c. exactement deux solutions **d.** plus de deux solutions

   Réponse b.
   Pour tout x, $\mathrm{e}^{x} > 0$. Donc $g(x) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$.

3. On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. La valeur de I est :

   a. $1 - \mathrm{e}^{-1}$ **b.** $\mathrm{e}^{-1} - 1$ **c.** $-\mathrm{e}^{-1}$ **d.** e^{-1}

   Réponse b.
   La fonction $x \longmapsto -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.
   Donc $I = \displaystyle\int_0^1 -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{0} = \mathrm{e}^{-1} - 1$

4. La fonction h est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = (2x+4)\ln x$.
   On note h' la fonction dérivée de la fonction h.
   Pour tout nombre x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $h'(x)$ est égale à :

   a. $\dfrac{2}{x}$ **b.** $2\ln x + \dfrac{4}{x}$ **c.** $\dfrac{2x+4}{x}$ **d.** $2\ln x + \dfrac{2x+4}{x}$

   Réponse d.
   Formule de dérivation d'un produit : $h'(x) = 2 \times \ln x + (2x+4) \times \dfrac{1}{x} = 2\ln x + \dfrac{2x+4}{x}$

5. Le prix d'une action a augmenté chaque mois de 5 % et cela pendant 3 mois consécutifs.
   Globalement, le prix de l'action a été multiplié par :

   a. $1,05^3$ **b.** 1,15 **c.** $3 \times 1,05$ **d.** 1,45

   Réponse a.
   Augmenter de 5 %, c'est multiplier par 1,05 ; si on augmente de 5 % pendant 3 mois consécutifs, on multiplie par $1,05 \times 1,05 \times 1,05 = 1,05^3$.

EXERCICE 2 — 5 points

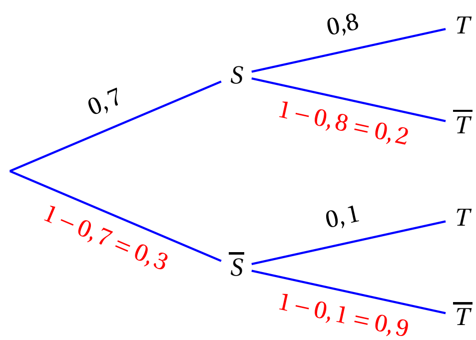
Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif. L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et, parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif. Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif. On interroge un élève au hasard dans le lycée.
On considère les évènements suivants :

S : L'élève interrogé est sensible au développement durable.

T : L'élève interrogé pratique le tri sélectif.

1. On construit un arbre pondéré décrivant la situation :



2. L'évènement « l'élève interrogé est sensible au développement durable et pratique le tri sélectif » est l'évènement $S \cap T$.
$P(S \cap T) = P(S) \times P_S(T) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$

3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(S \cap T) + P(\overline{S} \cap T) = P(S) \times P_S(T) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(T) = 0,56 + 0,3 \times 0,1 = 0,59$

4. On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif.
On évalue si cet élève est sensible au développement durable, donc on cherche $P_{\overline{T}}(S)$:
$P_{\overline{T}}(S) = \dfrac{P(S \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{P(S \cap \overline{T})}{1 - P(T)} = \dfrac{0,7 \times 0,2}{1 - 0,59} \approx 0,34$
Les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont de 34 % donc ne sont pas inférieures à 10 %.

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les 4 élèves interrogés.

   a. La probabilité qu'un élève interrogé au hasard pratique le tri sélectif est 0,59. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,59$.
   Pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par :
   $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

   b. La probabilité qu'aucun des quatre élèves ne pratique le tri sélectif est :
   $P(X = 0) = \binom{4}{0} \times 0,59^0 (1 - 0,59)^4 = 0,41^4 \approx 0,03$

c. La probabilité qu'au moins deux des quatre élèves pratiquent le tri sélectif est $P(X \geqslant 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\ &= \binom{4}{2} \times 0,59^2(1-0,59)^{4-2} + \binom{4}{3} \times 0,59^3(1-0,59)^{4-3} + \binom{4}{4} \times 0,59^4(1-0,59)^{4-4}\\ &\approx 0{,}3511 + 0{,}3368 + 0{,}1212 \approx 0,81 \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser l'évènement contraire :

$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X<2) = 1 - (P(X=0)+P(X=1)) \approx 1-(0{,}0283+0{,}1627) \approx 0,81$

EXERCICE 2 — 5 points

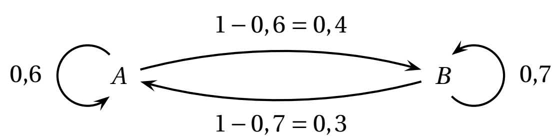
Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée. Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites.

Après une étude statistique, on considère que :

- si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est $0,6$;
- si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est $0,7$.

1. On note respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B » ; on traduit les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B :



2. La matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Normalement, il n'y a pas lieu de justifier cette matrice ; c'est du cours.

3. Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A (respectivement sur le site B).

On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste après n jours.

Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

a. On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}$

D'après le cours, on sait que, pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = P_0 M^n$; donc :

$$\begin{aligned} P_2 = P_0 M^2 &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0,5\times 0,48 + 0,5 \times 0,39 & 0,5 \times 0,52 + 0,5 \times 0,61 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0,24+0,195 & 0,26+0,305 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,435 & 0,565 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. On calcule à la calculatrice : $P_4 = P_0M^4 = P_0M^2M^2 = P_2M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}42915 & 0{,}57085 \end{pmatrix}$

En arrondissant au centième $P_4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}43 & 0{,}57 \end{pmatrix}$.

Au bout de 4 jours, 43 % des vélos seront sur le site A.

c. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable du graphe.

Pour que P soit un état du graphe, il faut que $a+b=1$.

Pour qu'en plus P soit un état stable, il faut que $PM = P$:

$$PM = P \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,6a + 0,3b &=& a \\ 0,4a + 0,7b &=& b \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -0,4a + 0,3b &=& 0 \\ 0,4a - 0,3b &=& 0 \end{array} \right. \iff 0,4a - 0,3b = 0$$

L'état stable est donc solution de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0,4a - 0,3b &=& 0 \\ a + b &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,4a - 0,3(1-a) &=& 0 \\ a + b &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,7a &=& 0,3 \\ a + b &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& \dfrac{3}{7} \\ b &=& \dfrac{4}{7} \end{array} \right.$$

On prend $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$. On vérifie que $PM = P$.

On peut donc en déduire que $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ est l'état stable du graphe.

d. Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site.
La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12 vélos.
Au début, il y a 70 vélos sur chaque site, donc 140 en tout.
Sur le site A, au bout d'un certain temps, il y aura $\dfrac{3}{7} \times 140 = 60$ vélos ; cela fait donc une différence de $70 - 60 = 10$ vélos.
Sur le site B, au bout d'un certain temps, il y en aura $\dfrac{4}{7} \times 140 = 80$ vélos ; cela fait donc une différence de $80 - 70 = 10$ vélos.
Le choix par la municipalité d'un véhicule pouvant contenir 12 vélos semble donc adapté.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10 % de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1. a. On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :   k, NbClients
Traitement :  Affecter à k la valeur 0
              Affecter à NbClients la valeur 1 000 000
              Tant que k < 8
                 | Affecter à k la valeur k + 1
                 | Affecter à NbClients la valeur 0,9 × NbClients + 60000
                 | Afficher NbClients
              Fin Tant que
```

Cet algorithme calcule et affiche le nombre de clients pour k variant de 1 à 8 c'est-à-dire pour les années 2011 à 2018.

b. On complète le tableau pour k variant de 0 jusqu'à 5 :

k	0	1	2	3	4	5
NbClients	1 000 000	960 000	924 000	891 600	862 440	836 196

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n, par : $\left\{ \begin{array}{rcl} U_0 &=& 1000 \\ U_{n+1} &=& 0,9U_n + 60. \end{array} \right.$

Le terme U_n donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année $2010 + n$.
Pour étudier la suite (U_n), on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 600$; on a donc $U_n = V_n + 600$

a. $V_{n+1} = U_{n+1} - 600 = 0,9U_n + 60 - 600 = 0,9(V_n + 600) - 540 = 0,9V_n + 540 - 540 = 0,9V_n$
$V_0 = U_0 - 600 = 1\,000 - 600 = 400$
Donc la suite (V_n) est géométrique de premier terme $V_0 = 400$ et de raison $q = 0,9$.

b. La suite (V_n) est géométrique de premier terme $V_0 = 400$ et de raison $q = 0,9$ donc, pour tout n, $V_n = V_0 q^n = 400 \times 0,9^n$.

c. $\left.\begin{array}{rcl} U_n & = & V_n + 600 \\ V_n & = & 400 \times 0,9^n \end{array}\right\} \Longrightarrow U_n = 400 \times 0,9^n + 600$ pour tout entier naturel n.

d. $U_{n+1} - U_n = (400 \times 0,9^{n+1} + 600) - (400 \times 0,9^n + 600) = 400 \times 0,9^{n+1} - 400 \times 0,9^n$
$= 400 \times 0,9^n(0,9 - 1) = -400 \times 0,9^n \times 0,1 < 0$
Donc la suite (U_n) est décroissante.
Comme U_n donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année $2010 + n$, on peut déduire que ce nombre de clients diminue au fil des années.

3. À la suite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie observe une modification du comportement de ses clients. Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8 % de ses clients et regagne 100 000 nouveaux clients. On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à 860 000.

L'évolution depuis 2014 peut être modélisée par une suite (W_n). En 2014, l'année 0, il y a 860 000 abonnés. L'opérateur perd 8 % des abonnés, donc il en garde 92 %, et en acquiert 100 000 nouveaux chaque année.

La suite (W_n) est donc définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} W_0 & = & 860000 \\ W_{n+1} & = & 0,92W_n + 100000 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$

On détermine à la calculatrice, à partir de quand le nombre d'abonnés dépasse 1 000 000 :

Rang	0	1	2	3	4	5	6
Abonnés	860 000	891 200	919 904	946 312	970 607	992 958	1 013 522

Il faut donc 6 ans pour que l'opérateur retrouve plus d'un million d'abonnés.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une machine permet le conditionnement d'un jus de fruit dans des bouteilles.
La quantité de jus injecté dans une bouteille par la machine, exprimée en ml (millilitre), est modélisée avec une variable aléatoire réelle X.
On admet que celle-ci suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Partie A

On prélève une bouteille au hasard en fin de chaîne de remplissage.

1. À la calculatrice, on trouve : $P(X \leqslant 496) \approx 0,02$
2. La probabilité que la bouteille ait un contenu compris entre 497 et 500 millilitres est donné par la calculatrice : $P(497 \leqslant X \leqslant 500) \approx 0,43$
3. On sait d'après le cours que si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$:
$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.
Il faut donc prendre $\alpha = 2\sigma = 4$ pour que $P(500 - \alpha \leqslant X \leqslant 500 + \alpha) \approx 0,95$.

Partie B

Une association de consommateurs a testé un lot de 200 bouteilles issues de cette chaine de production. Il a été constaté que 15 bouteilles contiennent moins de 500 ml de jus de fruit contrairement à ce qui est annoncé sur l'étiquetage ; donc la fréquence observée de bouteilles contenant au moins 500 ml de jus de fruit est $f = \dfrac{200-15}{200} = 0,925$.
L'entreprise qui assure le conditionnement de ce jus de fruit affirme que 97 % des bouteilles produites contiennent au moins 500 millilitres de jus de fruit ; donc la probabilité que la bouteille soit conforme est $p = 0,97$.
On va déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ; les conditions de détermination de cet intervalle sont $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.
Or $n = 200 > 30$, $np = 200 \times 0,97 = 194 > 5$ et $n(1-p) = 200 \times 0,03 = 6 > 5$
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Donc :

$$I = \left[0,97 - 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{200}}\,;\, 0,97 + 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,94\,;\,1]$$

$f = 0,925 \notin I$ donc le test réalisé par l'association remet en cause l'affirmation de l'entreprise.