∽ Baccalauréat ES Antilles–Guyane ∾
19 juin 2013
Corrigé

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Aucune explication n'était demandée dans cet exercice.

1. **d.** 38 %

   Augmenter de 20 % *c'est multiplier par* 1,20 *; augmenter de* 15 % *c'est multiplier par* 1,15. *Augmenter de* 20 % *puis de* 15 %, *c'est multiplier par* $1,20 \times 1,15 = 1,38$ *donc c'est augmenter de* 38 %.

2. **c.** Courbe 3

   En comparant le sens de variation de f et le signe des fonctions proposées comme dérivées, on peut éliminer les courbes 1 et 4. La tangente à $\mathscr{C}$ passant par A a pour coefficient directeur 1 *ce qui permet d'éliminer la courbe 2.*

3. **b.** $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

   On applique les formules $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ *et* $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$.

4. **a.** $S = 2 \times \dfrac{1 - 1,05^{12}}{1 - 1,05}$

   La somme des premiers termes d'une suite géométrique est $u_0 \times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

5. **c.** 0,48

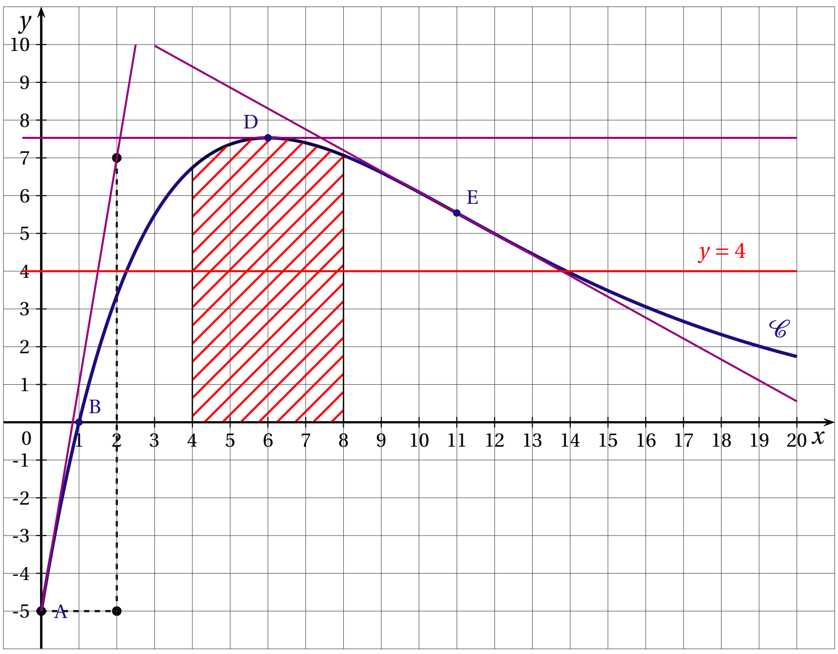
   On obtient ce résultat à la calculatrice.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 20]$. On a tracé les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, D et E d'abscisses respectives 0, 6 et 11.



1. $f(0) = -5$ (point A) ; $f(1) = 0$ (point B) ; $f'(0) = \dfrac{12}{2} = 6$ et $f'(6) = 0$ (point D)
2. La courbe $\mathscr{C}$ semble avoir le point E comme point d'inflexion.
3. $I = \displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$; $28 \leqslant I \leqslant 32$; *c'est l'aire de la partie hachurée en rouge sur le graphique.*
4. L'équation $f(x) = 4$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $[2;3]$ et l'autre dans l'intervalle $[13;14]$.
   Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 4$.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $f(x) = (5x-5)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.

1. $f'(x) = 5 \times \mathrm{e}^{-0,2x} + (5x-5) \times \left(-0,2\,\mathrm{e}^{-0,2x}\right) = 5\,\mathrm{e}^{-0,2x} - x\,\mathrm{e}^{-0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x} = 6\,\mathrm{e}^{-0,2x} - x\,\mathrm{e}^{-0,2x}$
   $= (-x+6)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$
2. **a.** Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x+6$.
   $-x+6 > 0 \iff 6 > x \iff x < 6$ donc :
   - $f'(x) > 0$ sur $[0;6[$;
   - $f'(6) = 0$;
   - $f'(x) < 0$ sur $]6;20]$.

   b. $f(0) = -5\,\mathrm{e}^0 = -5$; $f(6) = (5\times 6 - 5)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 6} = 25\,\mathrm{e}^{-1,2} \approx 7,53$; $f(20) = (5 \times 20 - 5)\,\mathrm{e}^{-4} = 95\,\mathrm{e}^{-4} \approx 1,74$; d'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0		6		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	↗	$25\,\mathrm{e}^{-1,2}$	↘	$95\,\mathrm{e}^{-4}$

3. On complète le tableau de variations de la fonction f :

x	0		α		6		20
$f(x)$	-5	↗	4	↗	$25\,\mathrm{e}^{-1,2}$	↘	$95\,\mathrm{e}^{-4}$

   D'après ce tableau de variations, on peut conclure que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0;6]$.
   En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice :
   $$\left.\begin{array}{l} f(2,2562) \approx 3,99998 < 4 \\ f(2,2563) \approx 4,00022 > 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [2,2562;2,2563]$$
   donc la valeur arrondie au millième de α est 2,256.
4. **a.** Soit F la fonction définie sur $[0;20]$ par $F(x) = (-25x - 100)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.
   $F'(x) = (-25) \times \mathrm{e}^{-0,2x} + (-25x - 100)\left(-0,2 \times \mathrm{e}^{-0,2x}\right) = -25\,\mathrm{e}^{-0,2x} + 5x\,\mathrm{e}^{-0,2x} + 20\,\mathrm{e}^{-0,2x}$
   $= -5\,\mathrm{e}^{-0,2x} + 5x\,\mathrm{e}^{-0,2x} = (5x-5)\,\mathrm{e}^{-0,2x} = f(x)$
   Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0;20]$.

   b. La valeur moyenne de la fonction f sur $[4;8]$ est $M = \dfrac{1}{8-4}\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   $$\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = F(8) - F(4) = \left((-25 \times 8 - 100)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 8}\right) - \left((-25 \times 4 - 100)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 4}\right)$$
   $$= -300\,\mathrm{e}^{-1,6} - \left(-200\,\mathrm{e}^{-0,8}\right) = 200\,\mathrm{e}^{-0,8} - 300\,\mathrm{e}^{-1,6}$$
   Donc $M = \dfrac{1}{4}\left(200\,\mathrm{e}^{-0,8} - 300\,\mathrm{e}^{-1,6}\right) = 50\,\mathrm{e}^{-0,8} - 75\,\mathrm{e}^{-1,6}$

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0\,;20]$. La fonction f modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros.

1. On admet que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6\,;\ 20]$ dont la valeur arrondie au millième est 13,903 ; on intègre cette information dans le tableau de variations de f :

x	0	α	6	β	20
$f(x)$	-5	4	$25\,\mathrm{e}^{-1,2}$	4	$95\,\mathrm{e}^{-4}$

D'après ce tableau de variations, $f(x) \geqslant 4$ pour $x \in [\alpha\,;\beta]$.

Pour que l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 4 000 € il faut déterminer x pour que $f(x) \geqslant 4$, c'est-à-dire pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta \iff 2{,}256 \leqslant x \leqslant 13{,}903$. Comme x désigne des centaines d'objets, il faut que le nombre d'objets produits soit compris entre 226 et 1 390.

2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets, ce qui correspond à $x \in [4\,;8]$.

La valeur moyenne du bénéfice est donnée par :

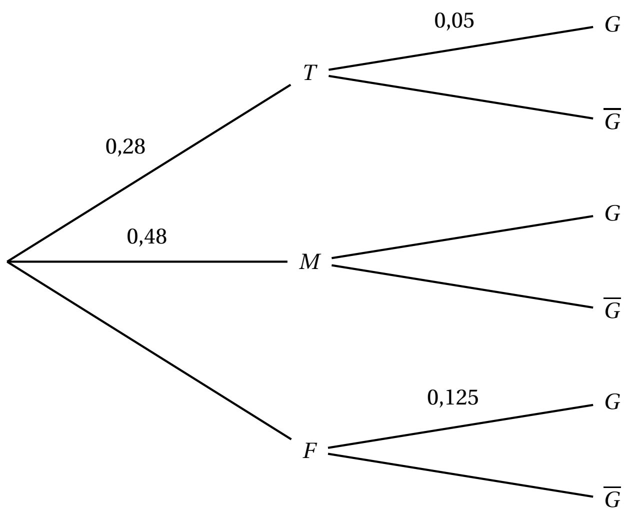
$\dfrac{1}{8-4}\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x \times 1000 = \left(50\,\mathrm{e}^{-0,8} - 75\,\mathrm{e}^{-1,6}\right) \times 1000 \approx 7324{,}2.$

La valeur moyenne du bénéfice est 7 324 €.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

1. On construire un arbre pondéré indiquant les données de l'énoncé :



2. L'ensemble $\{T\,;M\,;F\}$ forme une partition de l'ensemble des acheteurs donc

$P(T) + P(M) + P(F) = 1$; et donc $P(F) = 1 - P(T) - P(M) = 1 - 0{,}28 - 0{,}48 = 0{,}24$

$P(F \cap G) = P(F) \times P_F(G) = 0{,}24 \times 0{,}125 = 0{,}03$

3. On sait que 12 % des acheteurs ont choisi un ordinateur portable avec une extension de garantie donc $P(M \cap G) = 0{,}12$; $P_M(G) = \dfrac{P(M \cap G)}{P(M)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}48} = 0{,}25$

La probabilité qu'un acheteur ayant acquis un ordinateur portable souscrive une extension de garantie est 0,25.

4. D'après la formule des probabilités totales :

$P(G) = P(T \cap G) + P(M \cap G) + P(F \cap G) = 0{,}28 \times 0{,}05 + 0{,}12 + 0{,}03 = 0{,}164$

5. S'il y a 1 000 appareils vendus, le vendeur peut espérer $1\,000 \times 0{,}164 = 164$ extensions de garanties ce qui rapporte $164 \times 50 = 8\,200$ euros.

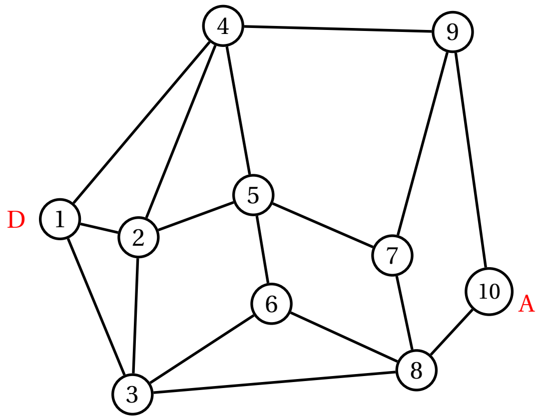
EXERCICE 3 — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.
La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

Légende :

1	Départ	2	Passerelle
3	Roche percée	4	Col des 3 vents
5	Pic rouge	6	Refuge
7	Col vert	8	Pont Napoléon
9	Cascade des anglais	10	Arrivée



1. Un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois est :

1 – 3 – 2 – 4 – 5 – 6 – 8 – 7 – 9 – 10

2. Un chemin qui passe une fois et une seule par toutes les arêtes d'un graphe est un chemin « eulérien ». On cherche donc un chemin eulérien qui part de D pour arriver à A.

rIl faut pour cela que tous les sommets du graphe soient de degré pair, sauf le sommet 1 et le sommet 10 ; ce n'est pas le cas donc il n'existe pas d'itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois.

3. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre. On donne M^5 :

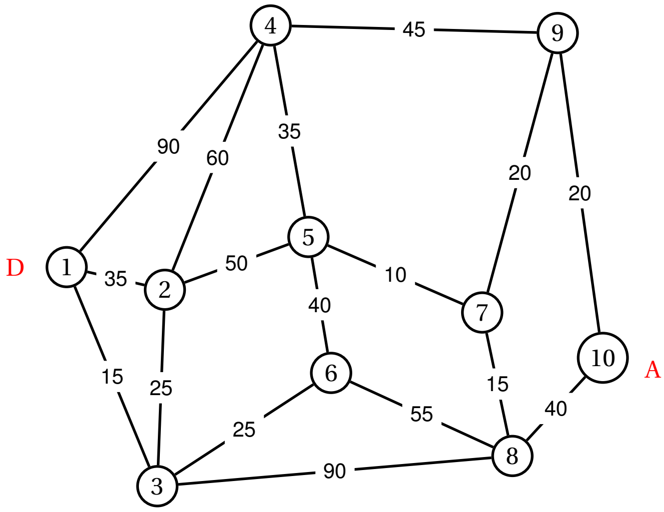
$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne donne le nombre de chemins de longueur 5 (la puissance de la matrice M) reliant le sommet 2 (deuxième ligne) au sommet 4 (quatrième colonne).

b. D se trouve au sommet 1 et A se trouve au sommet 10 ; on va donc chercher tous les chemins de longueur 5 qui vont du sommet 1 au sommet 10 : c'est le nombre situé sur la matrice M^5 à la ligne 1 et en colonne 10.
Il y a donc 31 itinéraires allant de D à A empruntant 5 sentiers.

Un de ceux passant par le pic rouge est : 1 – 2 – 5 – 7 – 8 – 10

4. On a complété ci-dessous le graphe décrivant les itinéraires avec les temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.



On va déterminer l'itinéraire allant de D à A le plus court en temps en utilisant l'algorithme de Dijkstra :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1
	35(1)	15 (1)	90 (1)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3 (1)
	~~40 (3)~~ 35 (1)		90 (1)	∞	40 (3)	∞	105 (3)	∞	∞	2 (1)
			~~95 (2)~~ 90 (1)	85 (2)	40 (3)	∞	105 (3)	∞	∞	6 (3)
			90 (1)	~~85 (2)~~ 80 (6)		∞	~~105 (3)~~ 95 (6)	∞	∞	5 (6)
			~~115 (5)~~ 90 (1)			90 (5)	95 (6)	∞	∞	4 (1)
						90 (5)	95 (6)	135 (4)	∞	7 (5)
							~~105 (7)~~ 95 (6)	~~135 (4)~~ 110 (7)	∞	8 (6)
								110 (7)	135 (8)	9 (7)
									~~135 (8)~~ 130 (9)	10 (9)

L'itinéraire le plus court en temps allant de D à A est de 130 minutes :

D – 1 $\xrightarrow{15}$ 3 $\xrightarrow{25}$ 6 $\xrightarrow{40}$ 5 $\xrightarrow{10}$ 7 $\xrightarrow{20}$ 9 $\xrightarrow{20}$ 10 – A

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

La direction d'une société fabriquant des composants électroniques impose à ses deux sites de production de respecter les proportions ci-dessous en termes de contrat d'embauche du personnel :

— 80 % de CDI (contrat à durée indéterminée)

— 20 % de CDD (contrat à durée déterminée).

On donne la composition du personnel des deux sites dans le tableau suivant :

	CDI	CDD	Effectif total
Site de production A	315	106	421
Site de production B	52	16	68

1. Le pourcentage de CDI sur le site de production A est : $\dfrac{315}{421} \times 100 = 75\,\%$.

   Le pourcentage de CDI sur le site de production B est : $\dfrac{52}{68} \times 100 \approx 76{,}471\,\%$.
2. Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :
$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
   Pour $p = 0{,}8$ et $n = 421$, on trouve :
$$I_{\text{A}} = \left[0{,}8 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{421}}\,;0{,}8 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{421}}\right] \approx [0{,}761\,;0{,}838]$$
   Pour $p = 0{,}8$ et $n = 68$, on trouve :
$$I_{\text{B}} = \left[0{,}8 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{68}}\,;0{,}8 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{68}}\right] \approx [0{,}704\,;0{,}895]$$
3. Pour le site de production A, le pourcentage de CDI de 75 % n'appartient pas à l'intervalle de fluctauation asymptotique I_{A} ; on peut dire que la proportion de CDI n'est pas respectée sur le site de production A.

   Pour le site de production B, le pourcentage de CDI de 76,471 % appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique I_{B} ; on peut dire que la proportion de CDI est respectée sur le site de production B.

Partie B

La direction de cette même société tolère 7 % de composants défectueux. Le responsable d'un site de production souhaite évaluer si sa chaîne de production respecte cette contrainte de 7 %. Pour cela, il prélève un échantillon de composants électroniques.

1. Si le responsable prélève un échantillon de 50 composants, on a $n = 50$ et $p = 0{,}07$ donc $n \geqslant 30$ mais $np = 3{,}5 < 5$ donc on ne peut pas utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.
2. Si le responsable prélève un échantillon de 100 composants, on a $n = 100$ et $p = 0{,}07$ donc $n \geqslant 30$, $np = 7 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 93 \geqslant 5$ donc on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.
3. D'après la question précédente, on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour $n = 100$ et $p = 0{,}07$:
$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\\ &= \left[0{,}07 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}07\times 0{,}93}}{\sqrt{100}}\,;0{,}07 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}07\times 0{,}93}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0{,}020\,;0{,}120] \end{aligned}$$
   La fréquence observée $\dfrac{9}{100} = 0{,}09$ appartient à l'intervalle de fluctuation I donc on peut dire que l'échantillon respecte les contraintes de la chaîne de production.