Durée : 3 heures

∽ Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers 11 juin 2010 ∽

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. $\left(\sqrt{\mathrm{e}^x}\right)^3$
2. $\ln\left(x^2+x+1\right)=0 \iff \ln\left(x^2+x+1\right)=\ln 1 \iff$
   $x^2+x+1=1 \iff x^2+x=0 \iff x(x+1)=0 \iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=-1.$
   Ces deux nombres sont bien solution.
3. $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-x} \iff x=-x \iff 2x=0 \iff x=0$, donc une seule solution.
4. Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $\quad \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1 \iff \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
   Comme la limite des deux termes extrême est nulle, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$.
5. Si g est une primitive de f sur I, alors $g'(x)=f(x)$; or g est croissante sur I, donc $g'(x)=f(x)>0$: la fonction f est positive sur I.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Étude statistique

1. La dette moyenne (ce qui n'apporte aucune information) est égale à 478,8.
2.

Année	1990	1992	1994	1996	1998	2000	2002	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Dette y_i en milliards d'euros	271,7	321,4	443	540,1	613,1	683,5	773,4	872,6
Indice	100	118,3	163	198,8	225,7	251,6	284,7	321,2

3. En utilisant la question précédente (calcul de l'indice) on obtient un taux global d'évolution de $321,2-100=221,2\,\%$
4. De1990 à 2004 la dette a été multipliée par 3,212.
   Si t est taux en pourcentage d'augmentation de cette dette on a :
   $(1+t)^7=3,212 \iff 1+t=3,212^{\frac{1}{7}} \iff t=3,212^{\frac{1}{7}}-1 \approx 0,1814.$
   De 1990 à 2014 la dette a augmenté en moyenne de 18,1 % tous les deux ans.

Partie B : Interpolation et extrapolation de données

1. La calculatrice donne $y=86,4x+262,3$ (coefficients arrondis au dixième).
2. On résout l'inéquation :
   $86,4x+262,3>1000 \iff 86,4x>837,7 \iff x>\dfrac{737,7}{86,4}.$
   Or $\dfrac{737,7}{86,4} \approx 8,5$, donc il faut prendre $x=9$ soit attendre 2008.

3. On résout de même l'inéquation :

$86,4x + 262,3 > 2 \times 683,5 \iff 86,4x > 1\,104,7 \iff x > \dfrac{1\,104,7}{86,4}$.

Or $\dfrac{1\,104,7}{86,4} \approx 12,7$.

Il faut prendre $x = 13$ c'est-à-dire attendre 2016.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On a bien $u_0 = 50$ et chaque année n s'il y a u_n milliers d'arbres on en abat $0,05u_n$: il en reste donc $u_n - 0,05u_n = 0,95u_n$ et on en plante 3 milliers, donc
$u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.
2. **a.** Quel que soit le naturel n,
$v_{n+1} = 60 - u_{n+1} = 60 - (0,95u_n + 3) = 57 - 0,95u_n = 0,95\left(\frac{57}{0,95} - u_n\right) = 0,95\,(60 - u_n) = 0,95v_n$.
L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

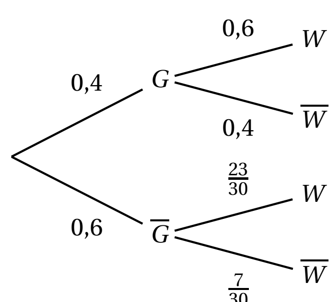
   b. Le premier terme $v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$.
   On sait que $v_n = v_0 \times 0,95^n = 10 \times 0,95^n$

   c. On a $v_n = 60 - u_n \iff u_n = 60 - v_n = 60 - 10 \times 0,95^n$ pour tout entier naturel n.
3. 2015 correspond à $n = 5$, d'où $u_5 = 60 - 10 \times 0,95^5 \approx 52,262$, donc 52 262 arbres.
4. **a.** $u_{n+1} - u_n = 60 - 10 \times 0,95^{n+1} - (60 - 10 \times 0,95^n) = -10 \times 0,95^{n+1} + 10 \times 0,95^n = 10 \times 0,95^n (1 - 0,95) = 0,5 \times 0,9^n$.

   b. Comme $0,5 > 0$ et $0,95^n >$ quel que soit le naturel n le résultat précédent montre que $u_{n+1} - u_n > 0$ quel que soit n : la suite est donc croissante.
5. 10 % de 50 représentent $0,1 \times 50 = 5$. Il faut donc résoudre l'inéquation :
$60 - 10 \times 0,95^n > 55 \iff 10 \times 0,95^n < 5 \iff 0,95^n < 0,5 \iff n \ln 0,95 < \ln 0,5 \iff n > \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,95}$.
Or $\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,95} \approx 13,5$: il faudra donc attendre 14 ans, soit en 2024.
6. Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$, donc
$\lim\limits_{n \to +\infty} 10 \times 0,95^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 60$ soit 60 000 arbres.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. $p(G) = 0,4$ et $p_G(W) = 0,6$.
2. 

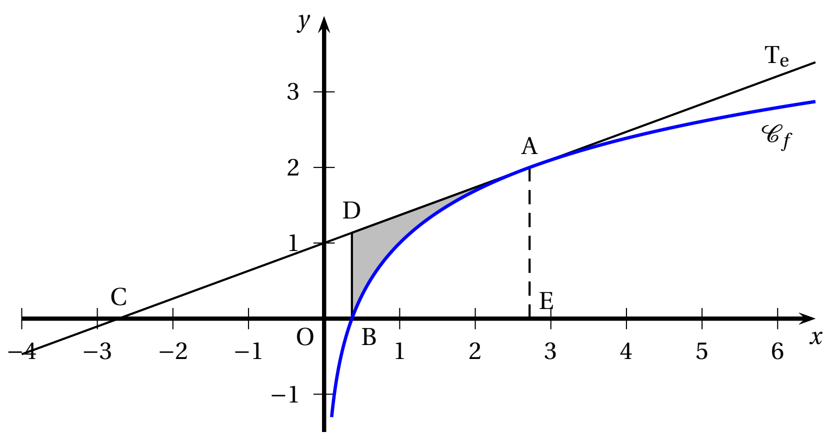
On suppose que la probabilité de W est : $p(W) = \dfrac{7}{10}$.

3. $p(G \cap W) = p(G) \times p_G(W) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.
4. On a d'après la loi des probabilités totales :
$p(W) = p(G \cap W) + p\left(\overline{G} \cap W\right)$, soit :
$p\left(\overline{G} \cap W\right) = p(W) - p(G \cap W) = 0,70 - 0,24 = 0,46$.
5. $p_W\left(\overline{G}\right) = \dfrac{p\left(W \cap \overline{G}\right)}{p(W)} = \dfrac{0,46}{0,7} = \dfrac{46}{70} = \dfrac{23}{35}$.
6. Tableau de la loi de probabilités du coût de revient des deux options.

Évènement	$G \cap W$	$G \cap \overline{W}$	$\overline{G} \cap W$	$\overline{G} \cap \overline{W}$
$p(X =)$	0,24	0,16	0,46	0,14
Coût	18	12	6	0

7. Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Interpréter ce résultat.
$\text{E}(X) = 18 \times 0,24 + 12 \times 0,16 + 6 \times 0,46 + 0 \times 0,14 = 9$
En moyenne le coût de revient par téléphone toutes options confondues est de 9 euros.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats



1. **a.** Le point B a une ordonnée nulle, donc $1 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff \text{e}^{\ln(x)} = \text{e}^{-1} \iff x = \text{e}^{-1} = \frac{1}{\text{e}}$.
B$\left(\text{e}^{-1}\,;\,0\right)$.
b. Si $x \geqslant \dfrac{1}{\text{e}}$ alors
$x \geqslant \text{e}^{-1} \iff \ln(x) \geqslant \ln\left[\text{e}^{-1}\right] \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff \ln(x) + 1 \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant 0$.
2. **a.** Une équation de T_e est : $y - f(\text{e}) = f'(\text{e})(x - \text{e})$.
On sait que $f(\text{e}) = 2$.
f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $f'(x) = \dfrac{1}{\text{e}} = \text{e}^{-1}$.
Une équation de la tangente est donc :
$y - 2 = \text{e}^{-1}(x - \text{e}) \iff y = \text{e}^{-1}x - 1 + 2 \iff y = \text{e}^{-1}x + 1$.

b. Les coordonnées de C vérifient l'équation de la tangente et son ordonnée est nulle, d'où :
$e^{-1}x+1=0 \iff e^{-1}x=-1 \iff x=-e$ (en multipliant chaque membre par e).
C($-$e ; 0).

c. On vérifie bien que le milieu de [EC] a pour coordonnées $\left(\dfrac{-e+e}{2}\ ;\ \dfrac{0+0}{2}\right)=(0\ ;\ 0)$.
Le milieu de [EC] est l'origine : les deux points E et C sont symétriques autour de O.

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=x\ln x$.

3. a. g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur intervalle :
$g'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1=f(x)$.
G est donc une primitive de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b. On a vu que si $x\geqslant\dfrac{1}{e}$, $f(x)\geqslant 0$, donc l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\frac{1}{e}$ et $x=e$ est égal à l'intégrale :
$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}(1+\ln x)\,dx=[G(x)]_{\frac{1}{e}}^{e}=G(e)-G\left(\frac{1}{e}\right)=e\ln(e)-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=e+e^{-1}\ln(e)=e+e^{-1}$. (environ 3,086 unités d'aire)

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
Soit D le point de la tangente T_e d'abscisse $\frac{1}{e}$; son ordonnée est donc :
$y=e^{-1}\times\frac{1}{e}+1=1+e^{-2}$.
L'aire de la surface grisée est égale à la différence de l'aire du trapèze BDAE et de l'aire du domaine calculé à la question précédente.
Or l'aire du trapèze est égale à $\dfrac{(BD+AH)\times BE}{2}=\dfrac{\left(e-e^{-1}\right)\left(1+e^{-2}+2\right)}{2}=\dfrac{\left(e-e^{-1}\right)\left(3+e^{-2}\right)}{2}=\dfrac{3e-2e^{-1}-e^{-3}}{2}$.
Donc l'aire de la surface grisée est égale à :
$\dfrac{3e-2e^{-1}-e^{-3}}{2}-\left(e+e^{-1}\right)=\dfrac{e-4e^{-1}-e^{-3}}{2}\approx 0{,}5984$
soit au millième près 0,598 unité d'aire.