Corrigé du baccalauréat Asie ES 20 juin 2011

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : ajustement exponentiel

1. Voir l'annexe.
2. **a.** Sur $[0\,;\,+\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 101 \times 0,13\mathrm{e}^{0,13x} = 13,13\mathrm{e}^{0,13x}$: les deux termes de ce produit sont supérieurs à zéro, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de $f(0) = 101$ à plus l'infini.

   b. $f(x) \geqslant 350 \iff 101\mathrm{e}^{0,13x} \geqslant 350 \iff \mathrm{e}^{0,13x} \geqslant \dfrac{350}{101} \iff 0,13x \geqslant \ln\left(\dfrac{350}{101}\right) \iff$
   $x \geqslant \dfrac{1}{0,13}\ln\left(\dfrac{350}{101}\right)$. Or $\dfrac{1}{0,13}\ln\left(\dfrac{350}{101}\right) \approx 9,56$
   Il faut donc prendre $x = 10$: l'indice dépassera la valeur 350 à compter de 2010.

Partie B : ajustement affine

1. On a $x_G = \dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8}{9} = 4$ et
   $y_G = \dfrac{100+114,14+131,17+147,06+166,56+189,63+219,38+251,01+268,14}{9} \approx 176,34$.
   Au centième prés on a $G(4\,;\,176,34)$.
2. La calculatrice donne $y = 21,7x + 89,53$ en prenant des coefficients arrondis au centième.
   Voir plus bas.
3. Il faut résoudre, avec $x \leqslant 14$, l'inéquation :
   $21,7x + 89,53 > 350 \iff 21,7x > 260,47 \iff x > \dfrac{260,47}{21,7}$; or $\dfrac{260,47}{21,7} \approx 12,003$. Il faut donc prendre $x = 13$, soit l'année 2013.

Partie C : Comparaison des modèles

2009 correspond au rang $x = 9$.
Avec l'ajustement exponentiel : $y = 101\mathrm{e}^{0,13\times 9} \approx 325,42$.
Avec l'ajustement affine : $y = 21,7 \times 9 + 89,53 = 284,83 \approx 284,24$.
C'est donc l'ajustement affine qui est le plus proche de la réalité.

Exercice 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Le coefficient directeur de la tangente en D est égal à : $\dfrac{6}{1} = 6$; $f'(1) = 6$;
   $f'(2) = 0$ (tangente horizontale).
2. La droite contient $\mathrm{D}(1\,;\,2)$ et a pour coefficient directeur 6 ; elle a donc une équation de la forme $y - 2 = 6(x-1) \iff y = 2 + 6x - 6 \iff y = 6x - 4$.
3. Sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$ la fonction f est continue, strictement décroissante de 6 à -2 ; d'après la théorème de la valeur intermédiaire il existe un réel unique x_1 tel que $f(x_1) = 0$.
4. On a donc le tableau de signes suivant :

x	-1		x_1		x_2		x_3		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

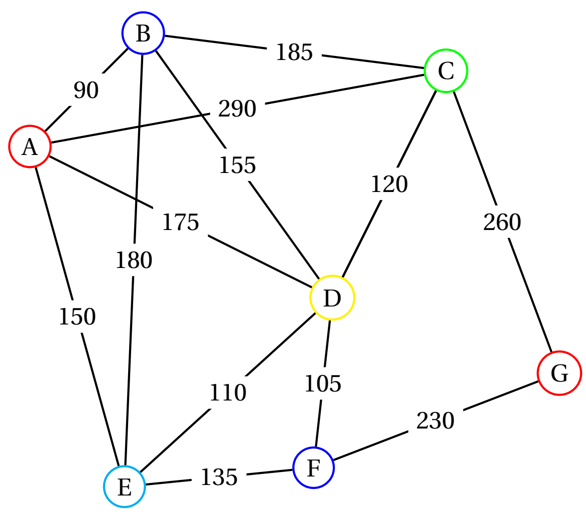
5.

Comme $F'(x) = f(x)$, d'après le tableau de signes précédent la fonction doitêtre croissante, décroissante, croissante et enfin décroissante : ce ne peut être ni la courbe $\mathscr{C}_1$ ni $\mathscr{C}_3$; c'est donc la courbe $\mathscr{C}_2$.
D'après le graphe de f, $f'(x)$ doit être successivement négative, positive et négative : seule $\mathscr{C}_1$ a cette propriété.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1 :

1. ABCD est un sous-graphe complet d'ordre 4 : il faut donc au minimum 4 couleurs.
2. Le nombre chromatique χ du graphe Γ vérifie $\chi \geqslant 4$ et le sommet D a pour degré 5, donc finalement $4 \leqslant \chi \leqslant 6$.
3. Voici une coloration possible.



Le nombre chromatique du graphe est égal à 4.

Partie II :

1. En partant de A on peut passer par tous les points en suivant la chaîne ABCDEFG. le graphe est donc connexe.
   Les degrés des points A, B, C, D, E, F, et G sont respectivement : 4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2.
   le graphe est connexe et admet deux sommets de degré impair : il a donc une chaîne eulérienne comme D-A-B-C-A-E-B-D-E-F-D-C-G-F.
2. On utilise l'algorithme de Dijkstra pour déterminer l'itinéraire le plus court :

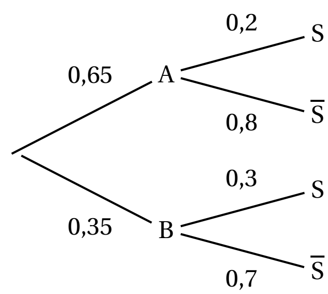
A	B	C	D	E	F	G	Sommet choisi
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A 0
	90 A	290 A	175 A	150 A	∞	∞	B 90
		275 B	175 B	150 A	∞	∞	E 150
		275 B	175 A		285 E	∞	D 175
		275 B			280 D	∞	C 275
					280 D	535 C	F 280
						510 F	G 510

À partir de G on remonte pour avoir les prédécesseurs : on obtient la chaîne A - D - F - G pour une distance de 510 m.

Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

1.



2. Il faut trouver $p(\text{B} \cap \text{S}) = p(\text{B}) \times p_{\text{B}}(\text{S}) = 0,35 \times 0,3 = 0,105$.

3. D'après la loi des probabilités totales : $p(\text{S}) = p(\text{A} \cap \text{S}) + p(\text{B} \cap \text{S})$.
De la même façon que dans la question précédente :
$p(\text{A} \cap \text{S}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{S}) = 0,65 \times 0,2 = 0,13$.
Donc $p(\text{S}) = 0,105 + 0,13 = 0,235$, soit 23,5 % : la salle de relaxation ne sera pas installée.

4. Il faut trouver $p_{\text{S}}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{S} \cap \text{A})}{p(\text{A})} = \dfrac{0,13}{0,235} = \dfrac{130}{235} = \dfrac{26}{47} \approx 0,55$ au centième près.

Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. La fonction C_T est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,20]$ et sur cet intervalle :
$C'_T(q) = 4 - 2q\text{e}^{-0,2q} - q^2 \times (-0,2)\text{e}^{-0,2q} = 4 + \left(0,2q^2 - 2q\right)\text{e}^{-0,2q} = C_m(q)$.
Cette dernière égalité montre que C_T est une primitive de C_m sur $[1\,;\,20]$.

2. **a.** On a $C_M(q) = \dfrac{C_T(q)}{q} = \dfrac{4q - q^2\text{e}^{-0,2q}}{q} = 4 - q\text{e}^{-0,2q}$.

b. La fonction C_M est dérivable sur $[1\,;\,20]$ et sur cet intervalle :
$C'_M(q) = -\text{e}^{-0,2q} - q \times (-0,2)\text{e}^{-0,2q} = \text{e}^{-0,2q}(0,2q - 1)$.

c. Comme $\text{e}^{-0,2q} > 0$, quel que soit le réel q, le signe de $C'_M(q)$ est celui de $0,2q - 1$.
Or $0,2q - 1 < 0 \iff 0,2q < 1 \iff q < 5$: la fonction C_M est décroissante sur $[1\,;\,5]$.
$0,2q - 1 > 0 \iff 0,2q > 1 \iff q > 5$: la fonction C_M est croissante sur $[5\,;\,20]$.
La fonction C_M a donc un minimum pour $q_0 = 5$ égal à $C_M(5) = 4 - 5\text{e}^{-0,2\times 5} = 4 - 5\text{e}^{-1} \approx 2,1606$ soit environ 2 161 €.

3. Il faut trouver le bénéfice le plus grand sur la plage $[1\,;\,20]$, soit si on appelle C et R les points intersections de la droite verticale d'équation $x = q$ avec la fonction coût et la fonction recette, le segment $[CR]$ le plus long.

On peut trouver visuellement que ceci se produit entre 9 et 11 et pour 10 le segment mesure plus de $5 \times 2,5 \times 1\,000 = 12\,500$ €.

La recette est définie par $R(q) = 4q$ soit une recette marginale de 4 (soit 4 000 €la tonne).

On compare le prix de vente au coût marginal : tant qu'il est plus grand on peut augmenter la production et le profit augmente.

Quand le coût marginal est supérieur au prix de vente, l'augmentation de la produira conduira à une diminution du bénéfice.

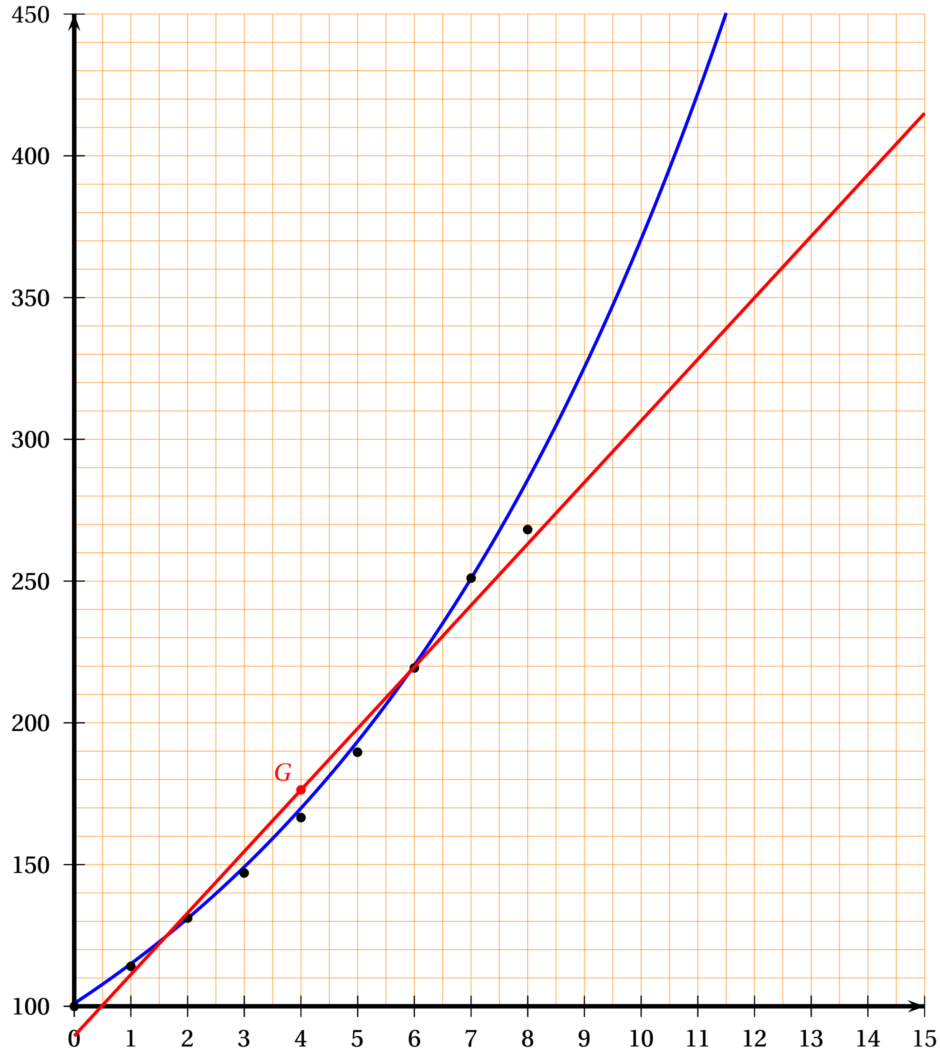
On aura donc un profit maximal quand le coût marginal est égal au prix de vente.

Pour chaque point de la courbe coût total, le coût marginal est représenté par le coefficient directeur de la tangente à la courbe coût total.

Conclusion : il faut trouver un point de la courbe où la tangente a un coefficient directeur de 4.

Avec la précision permise par la figure, on constate bien que c'est pour $q = 10$ soit un bénéfice maximal de $B(10) = 4 \times 10 - \left(4 \times 10 - 10^2\mathrm{e}^{-0,2\times 10}\right) = 100\mathrm{e}^{-2}) \approx 13,534$ soit un bénéfice de 13 534 €.

Annexe 1 Exercice 1 à rendre avec la copie



Annexe 2 Exercice 4 à rendre avec la copie