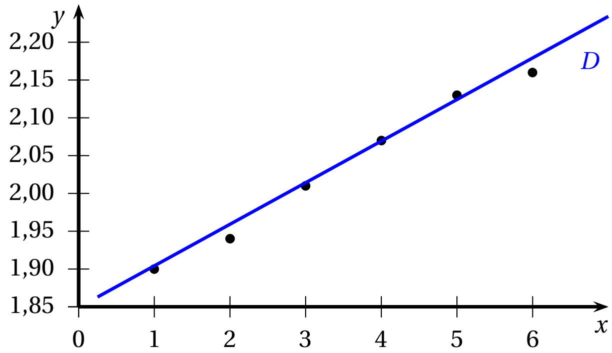
# Baccalauréat Asie ES 16 juin 2009

## Exercice 1 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

1. On a $\dfrac{2,16-1,90}{1,90} \approx 0,1368$, donc une augmentation de 13,68 % entre 2000 et 2005.
2. **a.** Un ajustement affine est justifié car les points sont pratiquement alignés.




   **b.** On obtient grâce à la calculatrice l'équation : $y = 0,055x + 1,842$

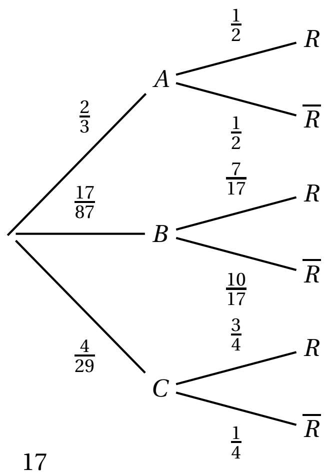
   **c.** Voir le graphique.

   **d.** 2010 correspond au rang 11 donc :
   $y = 0,055 \times 11 + 1,842 = 2,447 \approx 2,45$.
   En 2010 le prix du kilogramme de pain sera environ 2,45 €.
3. On a $2,16 \times (1,015)^5 \approx 2,33$. Suivant cette évolution, le prix du kilogramme de pain en 2010 sera environ de 2,33 €.
4. $0,055x + 1,842 \geqslant 2,60 \iff 0,055x \geqslant 0,758 \iff x \geqslant \dfrac{0,758}{0,055} \approx 13,78$.
   C'est donc à partir de l'année 2013 (soit au rang 14) que le prix du kilogramme de pain dépassera 2,60 €. (d'après le premier modèle de prévision).
   $2,16 \times (1,015)^x \geqslant 2,6 \iff (1,015)^x \geqslant \dfrac{2,6}{2,16} \iff x\ln(1,015) \geqslant \ln \frac{2,6}{2,16} \iff x \geqslant \dfrac{\ln \frac{2,6}{2,16}}{\ln(1,015)} \approx 12,45$.
   C'est donc à partir de l'année 2012 (de rang 13) que le prix du kilogramme de pain dépassera 2,60 € d'après le second modèle de prévision.

## Exercice 2 — 5 points

**Enseignement obligatoire**

1. On a $p(A) = \dfrac{58}{27} = \dfrac{2}{3}$, $p(C) = \dfrac{12}{87} = \dfrac{4}{29}$.
   $p_A\left(\overline{R}\right) = \dfrac{1}{2}$, $p_C\left(\overline{R}\right) = \dfrac{1}{4}$.
   Enfin le nombre de jeunes de 10 à 18 ans est : $87-(58+12) = 87-70 = 17$. Donc $p_B\left(\overline{R}\right) = \dfrac{10}{17}$.
   Voir l'arbre ci-dessous.




**2.** **a.** Il y a 17 jeunes donc $p(B) = \dfrac{17}{87}$.

**b.** $p(R \cap A) = p(A) \times p_A(R)$. Or $p_A(R) = 1 - p_A\left(\overline{R}\right) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. D'où :

$p(R \cap A) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

**c.** D'après la formule des probabilités totales, on a :

$p(R) = p(R \cap A) + p(R \cap B) + p(R \cap C)$ De la même façon que précédemment :

$p(B \cap R) = p(B) \times p_B(R) = p(B) \times \left[1 - p_B\left(\overline{R}\right)\right] = 1 - \dfrac{10}{17} = \dfrac{7}{17}$, donc :

$p(B \cap R) = \dfrac{17}{87} \times \dfrac{7}{17} = \dfrac{7}{87}$.

Enfin $p(C \cap R) = p(C) \times p_C(R) = p(C) \times \left[1 - p_C\left(\overline{R}\right)\right] = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, donc :

$p(B \cap R) = \dfrac{4}{29} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{29}$.

Finalement $p(R) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{87} + \dfrac{3}{29} = \dfrac{29+7+9}{87} = \dfrac{45}{87} = \dfrac{15}{29}$.

**d.** $p_R(A) = \dfrac{p(R \cap A}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{29}} = \dfrac{29}{39}$.

**3.** **a.** Les différents prix possibles pour un participant sont 8, 11, 15, 20 et 26 euros.

| | | | |
|---|---|---|---|
| prix sans repas en euros | 20 | 15 | 8 |
| prix avec repas en euros | 26 | 20 | 11 |

**b.** Loi de probabilité de $X$ :

8 € : $p\left(C \cap \overline{R}\right) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{29} = \dfrac{1}{29}$ ;

11 € : $p(C \cap R) = \dfrac{3}{29}$ ;

15 € : $p\left(B \cap \overline{R}\right) = \dfrac{10}{87} \times \dfrac{17}{87} = \dfrac{10}{87}$.

20 € : $p\left(A \cap \overline{R}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

$p(B \cap R) = \dfrac{7}{87}$, donc $p(X = 20) = p\left(A \cap \overline{R}\right) + p(B \cap R) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{87} = \dfrac{7+29}{87} = \dfrac{36}{87} = \dfrac{12}{29}$.

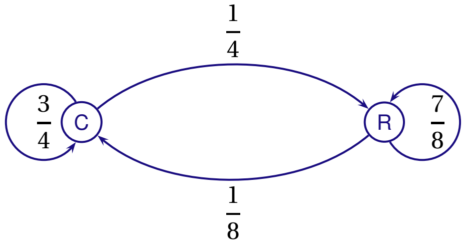
26 € : $p(A \cap R) = \dfrac{1}{3}$. D'où le tableau :

| $X = x_i$ | 8 | 11 | 15 | 20 | 26 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p\left(X = x_i\right)$ | $\dfrac{1}{29}$ | $\dfrac{3}{29}$ | $\dfrac{10}{87}$ | $\dfrac{12}{29}$ | $\dfrac{1}{3}$ |

## Exercice 2 **5 points**

### Enseignement de spécialité

1. On a le graphe probabiliste suivant :




2. En rangeant les états dans l'ordre alphabétique on a la matrice de transition suivante : $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$.

3. **a.** Lors du premier lancer la cible est atteinte avec une probabilité de $\frac{1}{10}$, donc $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$.

   **b.** On sait que $E_3 = E_1 \times M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{31}{128} & \frac{97}{128} \end{pmatrix}$.

   Au troisième lancer la probabilité d'atteindre la cible est égale à $\dfrac{31}{128} \approx 0,24$.

4. **a.** Si l'état stable est $E = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, on sait que :

   $E = E \times M \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$, soit

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}y \\ y & = & \frac{1}{4}x + \frac{7}{8}y \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{x}{4} - \frac{y}{8} & = & 0 \\ -\frac{x}{4} + \frac{y}{8} & = & 0 \\ x+y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x - y & = & 0 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \iff$$

   $$\left\{\begin{array}{lcl} 3x & = & 1 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{3} \\ y & = & \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

   Donc l'état stable est $E = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$.

   **b.** Sur un grand nombre de lancers la probabilité de rater la cible ($\frac{2}{3}$) est égale au double de la probabilité de l'atteindre ($\frac{1}{3}$).

   L'adulte a raison : $\dfrac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$.

## Exercice 3 **5 points**

### Commun à tous les candidats

1. Si $t$ est le pourcentage d'augmentation annuel moyen sur les dix ans, on a :

   $(1+t)^{10} = (1+0,20)^4 \times (1+0,07)^5 \times (1+0,06) \iff 1+t = \left(1,2^4 \times 1,07^5 \times 1,06\right)^{\frac{1}{10}} \iff$
   $t = \left(1,2^4 \times 1,07^5 \times 1,06\right)^{\frac{1}{10}} - 1$ soit $t \approx 11,91$ soit 11,9 % au dixième près.

2. Si $t$ est le pourcentage d'augmentation en 2009 on doit avoir :

   $(1+t)(1-0,05) = 1 \iff (1+t) \times 0,95 = 1 \iff 1+t = \dfrac{1}{0,95} \iff t = \dfrac{1}{0,95} - 1 \approx 0,0526$, soit 5,3 % au dixième près.

3. Il faut résoudre dans l'ensemble des nombres supérieurs à zéro :

   $2\ln x = \ln\dfrac{x}{2} \iff \ln x^2 = \ln\dfrac{x}{2} \iff x^2 = \dfrac{x}{2} \iff x^2 - \dfrac{x}{2} = 0 \iff x\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 0 \iff$
   $x = 0$ ou $x - \dfrac{1}{2} = 0$. La solution 0 est interdite reste $x = \dfrac{1}{2}$.

4. Si la fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $[5\ ;\ +\infty[$, alors le nombre dérivé $f'(6)$ est négatif. Ceci élimine les trois dernières équations. Reste $y = -3x+3$.

## Exercice 4 **5 points**

### Commun à tous les candidats

1. **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ d'après la limite d'un produit car $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-4} = +\infty$ (limite d'une fonction composée) et $\lim\limits_{x\to+\infty} 7-x = -\infty$.

   **b.** Pour tout réel supérieur à zéro
   $f'(x) = -1\times\mathrm{e}^{x-4} + (7-x)\mathrm{e}^{x-4} = (6-x)\mathrm{e}^{x-4}$.

   **c.** $\mathrm{e}^{x-4} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $(6-x)$, c'est-à-dire positif sur $[0\,;6]$ et négatif sur $[6\ ;\ +\infty[$.
   D'où le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $7\mathrm{e}^{-4}$ | $\nearrow$ | $\mathrm{e}^2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

2. **a.** *Méthode* 1 $g'(x) = 2h'(x)\times\dfrac{1}{h(x)}$
   Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ on a d'après le tableau de variations $h(x) > 0$ et $h'(x) < 0$ puisque la fonction est décroissante. Donc $g'(x) < 0$ : sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction $g$ est décroissante.
   *Méthode* 2 Les fonctions $h$ et $\ln(h)$ ont le même sens de variation sur tout intervalle où $h$ est strictement positive (car la fonction ln est croissante) , ce qui est ici le cas, d'après le tableau de variations de $h$ : comme $h$ est décroissante la fonction $2\ln h$ est également décroissante.

   **b.** Comme $\dfrac{x+5}{x+1} = \dfrac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ qui a pour limite 1 au voisinage de plus l'infini, on a
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x+5}{x+1} = 0$
   La courbe représentative de la fonction $g$ admet donc l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

3. **a.** La courbe $\mathscr{C}_1$ représente la fonction $f$ car c'est la seule qui a ses variations.

   **b.** Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les coordonnées des points communs aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
   On lit à peu près 3 et 7, valeurs arrondies à l'unité.

   **c.** Elliot s'est trompé dans le choix de la primitive.
   En effet : $\left[\left(7x-\dfrac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{x-4}\right]' = (7-x)\mathrm{e}^{x-4} + \left(7x-\dfrac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{x-4} = \mathrm{e}^{x-4}\left(7-x+7x-\dfrac{1}{2}x^2\right) = \left(7+6x-\dfrac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{x-4} \neq f(x)$.
   En fait il a pris le produit de primitives comme primitive du produit, ce qui est faux.
   Par contre la primitive de Perrine est correct ainsi que le reste de son calcul.

**Partie B : Application économique**

D'après le résultat de la question A. 3. b. une valeur approchée de l'équation $f(x) = g(x)$ est 3.
On a $f(3) \approx 1,5$.
Le prix d'équilibre est donc à peu près 1,50 € par kg pour une production de 3 000 tonnes.