Corrigé du baccalauréat ES Antilles-Guyane juin 2008

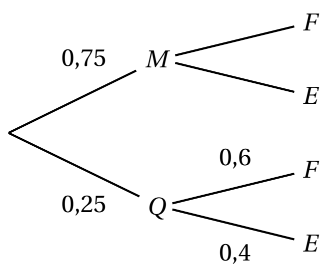
EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. La valeur moyenne sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$ de la fonction f est égale à :
$\dfrac{1}{2-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{2}(6x^2+3)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\left[2x^3+3x\right]_{-1}^{2} = \dfrac{1}{3}\left[2\times 2^3+3\times 2-\left(2\times(-1)^3+3\times(-1)\right)\right]$
$= \dfrac{1}{3}(16+6+2+3) = \dfrac{17}{3} = 9.$
2. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2}{x}\right) = -\infty$.
3. Avec $3-x>0 \iff x<3$, $\ln(3-x)\leqslant 0 \iff \mathrm{e}^{\ln(3-x)}\leqslant \mathrm{e}^0 \iff 3-x\leqslant 1 \iff x\geqslant 2$.
Les réels solutions sont ceux de l'intervalle $[2\ ;\ 3[$.
4. Avec $a>0$, $b>0$: $\ln(ab)-\ln\left(a^2\right) = \ln a+\ln b-2\ln a = \ln b-\ln a = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

EXERCICE 2 **6 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

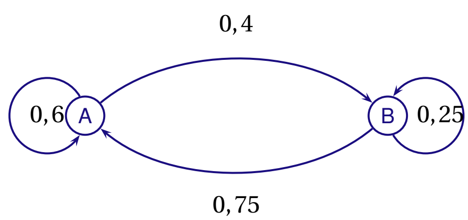


1. On a $p(Q\cap E) = p(Q)\times p_Q(E) = 0,25\times 0,4 = 0,1$.
2. On a $p(E) = 0,7$. D'après la loi des probabilités totales :
$p(E) = p(M\cap E)+p(Q\cap E) \iff p(M\cap E) = p(E)-p(Q\cap E) = 0,7-0,1 = 0,6$.
3. On a $p_E(Q) = \dfrac{p(E\cap Q)}{p(E)} = \dfrac{0,1}{0,6} = \dfrac{1}{6} \approx 0,17$.
4. On a une épreuve de Bernoulli avec $n=3$ et $p = p(E) = 0,7$.
La probabilité qu'aucun des trois ne préfère les films étrangers. La probabilité de cet évènement est $(1-0,7)^3 = 0,3^3$, donc la probabilité qu'au moins un d'entre eux préfère les films étrangers est égale à : $1-0,3^3 = 0,973 \approx 0,97$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.**



b. En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique la matrice de transition est
$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$.

2. On a $T_3 = T_2 \times M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,34 \end{pmatrix}$.

Ce qui signifie qu'à la troisième séance 66 % des spectateurs voient un film français.

3. La matrice de transition ne contient pas de terme nul, donc l'état T_n converge vers un état stable $T = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ tel que

$$T = T \times = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0,6x + 0,75y \\ y & = & 0,4x + 0,25y \\ x + y & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0,4x - 0,75y & = & 0 \\ -0,4x + 0,75y & = & 0 \\ x + y & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0,4x - 0,75y & = & 0 \\ x + y & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0,4(1-y) - 0,75y & = & 0 \\ x + y & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0,4 & = & 1,15y \\ x + y & = & 1 \end{array} \right. \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{0,4}{1,15} & = & y \\ x & = & 1 - y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{8}{23} & = & y \\ x & = & 1 - \frac{8}{23} = \frac{15}{23} \end{array} \right.$$

Donc $T = \begin{pmatrix} \frac{15}{23} & \frac{8}{23} \end{pmatrix}$. Soit en arrondissant au centième $T \approx \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.
Au bout d'un certain nombre de semaines 65 % verront un film français.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de rugby de 2001 à 2006.

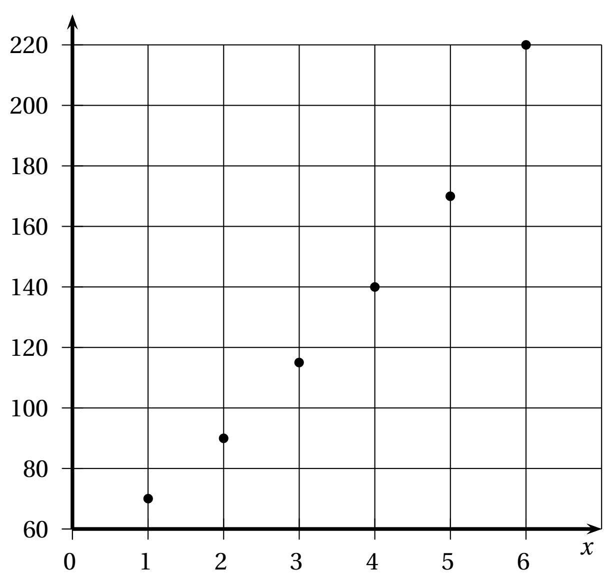
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents y_i	70	90	115	140	170	220

y

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'adhérents en fonction du rang x de l'année.

Partie A : un ajustement affine.

1.



2. La calculatrice donne, les coefficients étant arrondis à l'unité : $y = 29x + 33$.
3. 2007 correspond au rang $x = 7$, d'où avec cet ajustement :
   $y = 29 \times 7 + 33 = 203 + 33 = 236$ adhérents prévus en 2007.

Partie B : un ajustement exponentiel.

On pose $z = \ln y$.

1.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	4,248	4,5	4,745	4,942	5,136	5,394

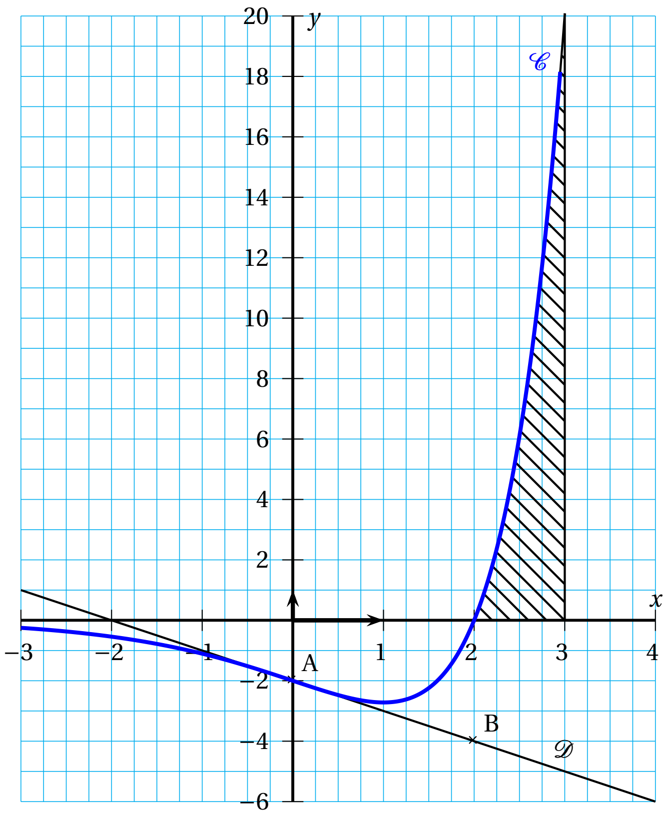
2. La calculatrice donne, les coefficients étant arrondis au centième : $z = 0,224x + 4,044$.
3. On pour $y > 0$, $\quad z = \ln y \iff y = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{0,224x+4,044} = \mathrm{e}^{0,224x} \times \mathrm{e}^{4,044}$.
   Or $\mathrm{e}^{4,044} \approx 57,054$, donc $y \approx 57,1\mathrm{e}^{0,224x}$.
4. Avec cet ajustement exponentiel pour $x = 7$, on obtient :
   $y \approx 57,1\mathrm{e}^{0,224\times7} = 57,1\mathrm{e}^{1,568} \approx 274$ adhérents à l'unité près en 2007.

Partie C : comparaison des ajustements.

L'ajustement exponentiel est le plus proche de la réalité : c'est lui le plus pertinent.

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A



1. **a.** On lit $f(0) = -2$.

   b. Le nombre dérivé en $x = 0$ est égal au coefficient directeur de la droite (AB) : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-4-(-2)}{2-0} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

2. **a.** $f(x) = (x+a)\mathrm{e}^{bx}$.
   our tout réel x, $f'(x) = (bx + ab + 1)\mathrm{e}^{bx}$. On a en dérivant le produit :
   $f'(x) = 1\mathrm{e}^{bx} + (x+a) \times b\mathrm{e}^{bx} = \mathrm{e}^{bx}(1 + bx + ab)$.

   b. On a donc :
   $\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & -2 \\ f'(0) & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a\mathrm{e}^0 & = & -2 \\ (1+ab)\mathrm{e}^0 & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ 1+ab & = & -1 \end{array}\right. \iff$
   $\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ 1-2b & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ 2 & = & 2b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ 1 & = & b \end{array}\right.$
   Donc $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$.

Partie B

1. On a déjà vu que $f'(x) = \mathrm{e}^{bx}(1 + bx + ab) = \mathrm{e}^x(1 + x - 2) = (x-1)\mathrm{e}^x$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$.
   - si $x < 1$, $x - 1 < 0$, donc f est décroissante sur $-\infty$; 1] ;
   - si $x > 1$, $x - 1 > 0$, donc f est croissante sur 1 ; $+\infty$]
   - si $x = 1$, $f'(1) = 0$: la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe $\mathscr{C}$ est horizontale. Ceci correspond bien à la représentation graphique donnée.

2. **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   b. On a $f(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x$.
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   Ce résultat montre géométriquement que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

3. **a.** On a sur $\mathbb{R}$, $g'(x) = 1\mathrm{e}^x + (x-3)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1+x-3) = (x-2)\mathrm{e}^x = f(x)$, donc g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   b. On a donc $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_2^3 = g(3) - g(2) = (3-3)\mathrm{e}^3 - (2-3)\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2$

   c. On a vu que sur $[1 ; +\infty[$, f est croissante ; or $f(2) = 0$, donc sur l'intervalle $[2 ; 3]$, $f(x) \geqslant 0$.
   Par conséquent l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$ est égale à l'intégrale calculée précédemment soit $\mathrm{e}^2 \approx 7,389$ soit environ 7,4 unités d'aire.
   On peut vérifier approximativement ce résultat : 1 unité d'aire fait 4 petits carreaux, donc l'aire de la surface hachurée en contient à peu près 29.