

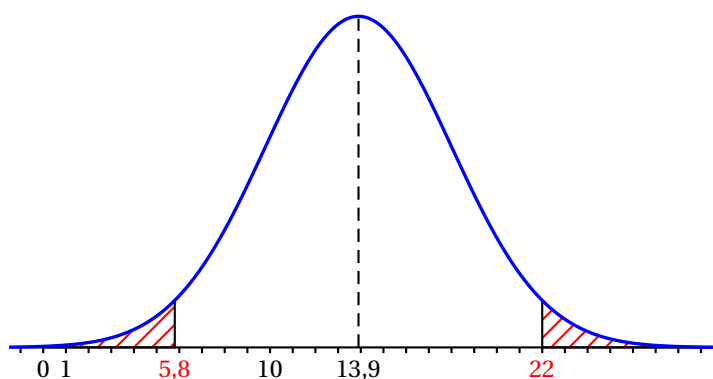
∞ Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 22 avril 2016 ∞

Exercice 1

Commun à tous les candidats

4 points

Partie A



1. On sait que $p(T \geq 22) = 0,023$.

a. Le premier domaine est limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x = 22$.

L'autre domaine est le symétrique du premier par rapport à la droite d'équation $x = 13,9$; $22 - 13,9 = 8,1$ et $13,9 - 8,1 = 5,8$.

Le second domaine est limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 5,8$. Voir ci-dessus

b. $P(5,8 \leq T \leq 22) = 1 - (P(T > 22) + P(T < 5,8)) = 1 - 2 \times 0,023 = 1 - 0,046 = 0,954$

D'après le cours, $P(\mu - 2\sigma \leq T \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$, donc on a

$P(13,9 - 2\sigma \leq T \leq 13,9 + 2\sigma) = 0,954$.

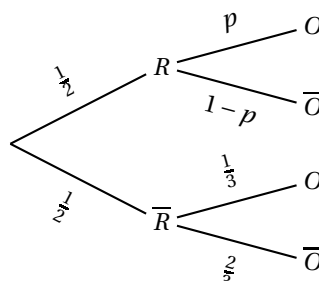
On en déduit que σ vérifie $13,9 - 2\sigma = 5,8$ et $13,9 + 2\sigma = 22$, ce qui donne $\sigma \approx 4,05$, soit 4,1 au dixième.

2. On cherche la probabilité qu'un jeune soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine, c'est-à-dire $P(T > 18)$.

On trouve à la calculatrice, en prenant $m = 13,9$ et $\sigma = 4,1$: $P(T > 18) \approx 0,16$.

Partie B

1. *Calculs de probabilités*



D'après la loi des probabilités totales :

$$p(O) = p(R \cap O) + p(\bar{R} \cap O) = p(R) \times p_R(O) + p(\bar{R}) \times p_{\bar{R}}(O) = \frac{1}{2} \times p + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

Donc la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est : $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

2. *Intervalle de confiance*

a. La fréquence de Oui est $f = \frac{625}{1500} = \frac{5}{12}$.

L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage est donc

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{1500}} ; \frac{5}{12} + \frac{1}{\sqrt{1500}} \right] \approx [0,390 ; 0,443].$$

b. Si le protocole est correct on a donc :

$$0,390 \leq \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \leq 0,443 \iff 2,340 \leq 3p + 1 \leq 2,658 \iff 1,340 \leq 3p \leq 1,658$$

$$\iff \frac{1,340}{3} \leq p \leq \frac{1,658}{3} \text{ soit } 0,446 \leq p \leq 0,553$$

Le nombre de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet est entre 44,6 % et 55,3 %.

Exercice 2

Commun à tous les candidats

3 points

1. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OBJ rectangle en O donne :

$$BJ^2 = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow BJ = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$BK = BJ - KI = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

2. a. L'affixe de A_2 a pour module 1 et pour argument $\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$. Donc $z_{A_2} = e^{i\frac{4\pi}{5}}$

$$\begin{aligned} \text{b. } BA_2^2 &= |z_{A_2} - z_B|^2 = \left| e^{i\frac{4\pi}{5}} - (-1) \right|^2 = \left| e^{i\frac{4\pi}{5}} + 1 \right|^2 = \left| \cos \frac{4\pi}{5} + 1 + i \sin \frac{4\pi}{5} \right|^2 \\ &= \left(\cos \frac{4\pi}{5} + 1 \right)^2 + \sin^2 \frac{4\pi}{5} = \cos^2 \frac{4\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} + 1 + \sin^2 \frac{4\pi}{5} = 2 + 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) \end{aligned}$$

c. D'après le logiciel de calcul formel, $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}(-\sqrt{5} - 1)$ donc :

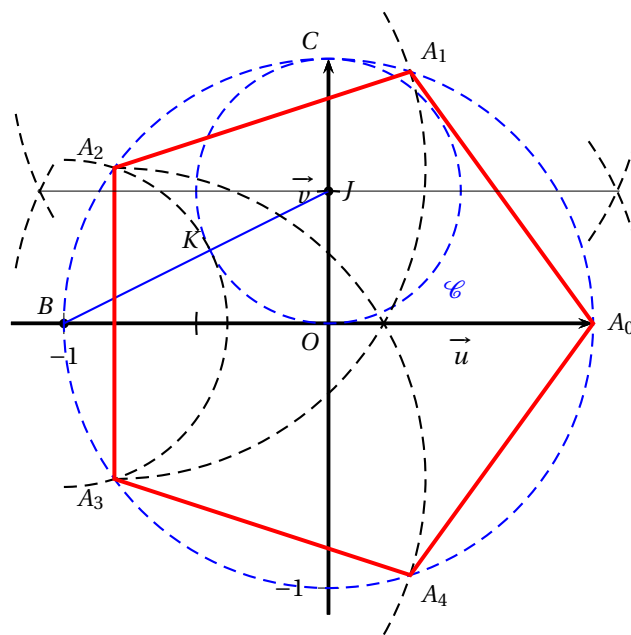
$$BA_2^2 = 2 + 2 \times \frac{1}{4}(-\sqrt{5} - 1) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Donc } BA_2 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ d'après le logiciel de calcul formel.}$$

On en déduit que $BA_2 = BK$.

3. Procédé de construction (voir figure page 3) :

- Soit C le point de coordonnées $(0; 1)$. La médiatrice de $[OC]$ coupe l'axe des ordonnées au point J de coordonnées $(0; \frac{1}{2})$.
On place le point B sur l'axe des abscisses, d'abscisse négative tel que $OB = 2OJ$, on construit $[BJ]$ et le cercle \mathcal{C} centré en J passant par O donc de rayon $\frac{1}{2}$;
- on obtient le point K à l'intersection du cercle \mathcal{C} et du segment $[BJ]$;
- le cercle de centre B de rayon BK coupe le cercle unitaire aux points A_2 et A_3 ;
- le cercle de centre A_2 passant par A_3 recoupe le cercle unitaire en A_1 ;
- le cercle de centre A_3 passant par A_2 recoupe le cercle unitaire en A_4 ;
- le point A_0 est le point d'affixe 1.



Exercice 3 **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**

Partie A

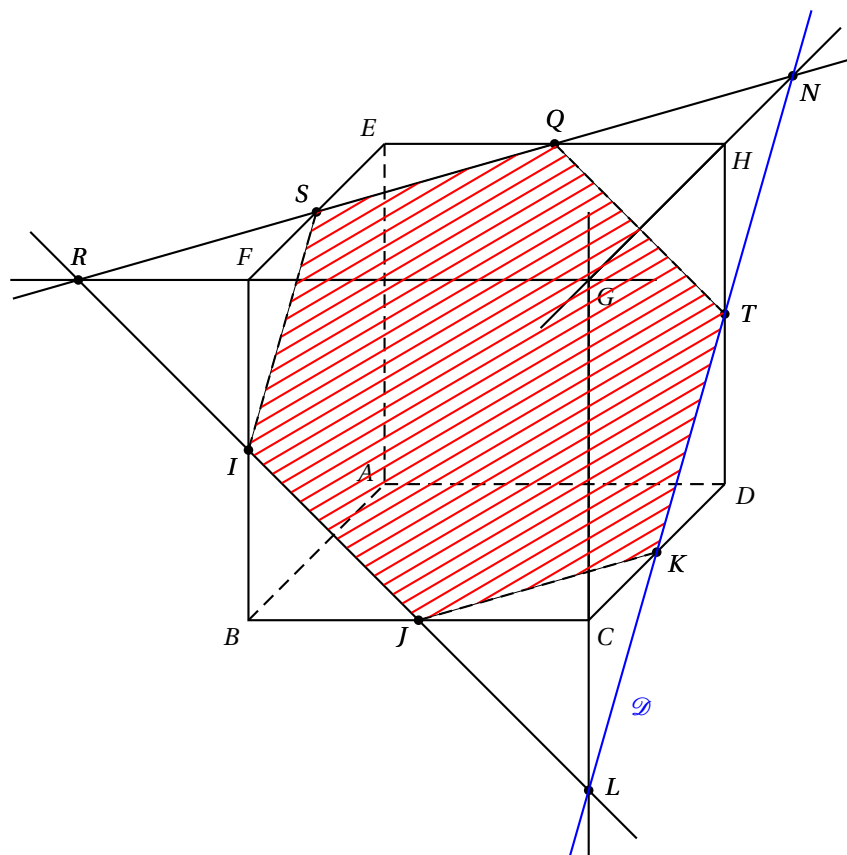
On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L .

On construit :

- le point L ;

- l'intersection \mathcal{D} des plans (IJK) et (CDH) ;

- la section du cube par le plan (IJK) .



Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, les coordonnées des sommets du cube sont :
 $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $C(1; 1; 0)$, $F(1; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$, $G(1; 1; 1)$.

Le point I est le milieu de $[BF]$ donc I a pour coordonnées $(1; 0; \frac{1}{2})$.

Le point J est le milieu de $[BC]$ donc J a pour coordonnées $(1; \frac{1}{2}; 0)$.

Le point K est le milieu de $[CD]$ donc K a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; 1; 0)$.

2. a. Le vecteur \overrightarrow{AG} a les mêmes coordonnées que le point G c'est-à-dire $(1; 1; 1)$.

$$\bullet \overrightarrow{IJ} \text{ a pour coordonnées } \left(1 - 1; \frac{1}{2} - 0; 0 - \frac{1}{2}\right) = \left(0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IJ} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{IJ}$$

$$\bullet \overrightarrow{JK} \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{1}{2} - 1; 1 - \frac{1}{2}; 0 - 0\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right).$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{JK}$$

Les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{JK} ne sont pas colinéaires; le vecteur \overrightarrow{AG} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc il est normal au plan (IJK) .

- b. Le vecteur \overrightarrow{AG} est normal au plan (IJK) ; le plan (IJK) est l'ensemble des points $P(x; y; z)$ de l'espace tels que \overrightarrow{IP} est orthogonal à \overrightarrow{AG} :

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{IP} \text{ a pour coordonnées } \left(x - 1; y - 0; z - \frac{1}{2}\right) = \left(x - 1; y; z - \frac{1}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IP} = 0 \iff 1 \times (x - 1) + 1 \times y + 1 \times \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff x + y + z - \frac{3}{2} = 0$$

$$\text{Le plan } (IJK) \text{ a pour équation } x + y + z - \frac{3}{2} = 0.$$

3. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$; donc le point M a pour coordonnées $(t; t; t)$.

$$\text{a. } IM^2 = (t - 1)^2 + (t - 0)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = t^2 - 2t + 1 + t^2 + t^2 - t + \frac{1}{4} = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$$

- b. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$ est minimal pour $x = -\frac{b}{2a}$, donc $3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$ est minimal pour $t = -\frac{-3}{2 \times 3}$ donc pour $t = \frac{1}{2}$.

$$MI^2 \text{ donc } MI \text{ est minimal pour } t = \frac{1}{2}; \text{ cela correspond au point } M_m \text{ de coordonnées } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

4. a. Le plan (IJK) a pour équation $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$ et le point M_m a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

$$x_{M_m} + y_{M_m} + z_{M_m} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \text{ donc } M_m \in (IJK)$$

- b. Les points I et M_m appartiennent au plan (IJK) et le vecteur \overrightarrow{AG} est normal au plan (IJK) ; on en déduit que les droites (IJ) et (AG) sont orthogonales.

Mais le point M_m est le milieu de $[AG]$ donc il appartient à (AG) .

On peut donc en déduire que les droites (IM_m) et (AG) sont perpendiculaires en M_m .

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{IM_m} \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{1}{2} - 1; \frac{1}{2} - 0; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} \text{ donc le vecteur } \overrightarrow{BF} \text{ a pour coordonnées } (0; 0; 1).$$

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{IM_m} = 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{IM_m}$ donc la droite (IM_m) est orthogonale à la droite (BF) .

Mais le point I appartient aux deux droites (IM_m) et (BF) donc on peut dire que les droites (IL) et (BF) sont perpendiculaires en I .

Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.

Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M . On le note $\det(M)$; ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.

$$MN = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3a-5b} \begin{pmatrix} 3a-5b & -ab+ab \\ 15-15 & -5b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$NM = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3a-5b} \begin{pmatrix} 3a-5b & 3b-3b \\ -5a+5a & -5b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc N est la matrice inverse de la matrice M .

2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$.

a. $\det(M) = 3 \iff 3a - 5b = 3$

$3 \times 6 - 5 \times 3 = 18 - 15 = 3$ donc le couple $(6; 3)$ est une solution de (E) .

- b. • On suppose que le couple $(a; b)$ est solution de (E) .

$$\begin{array}{rcl} & 3a & - 5b & = & 3 \\ (6; 3) \text{ est solution} & 3 \times 6 & - 5 \times 3 & = & 3 \\ \text{par soustraction} & \underline{3(a-6)} & - \underline{5(b-3)} & = & \underline{0} \iff 3(a-6) = 5(b-3) \end{array}$$

- Réciproquement, si $(a; b)$ vérifie $3(a-6) = 5(b-3)$ alors :

$3a - 18 = 5b - 15 \iff 3a - 5b = 3$ donc $(a; b)$ est solution de (E) .

Donc $(a; b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a-6) = 5(b-3)$.

On cherche les solutions de l'équation (E) .

- Si $3(a-6) = 5(b-3)$, alors 3 divise $5(b-3)$; or 3 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de GAUSS, 3 divise $b-3$. Cela veut dire que $b-3$ s'écrit $3k$ avec k entier relatif.

$3(a-6) = 5(b-3)$ et $b-3 = 3k$ donc $3(a-6) = 5 \times 3k$ ce qui équivaut à $a-6 = 5k$

$a-6 = 5k \iff a = 6+5k$ et $b-3 = 3k \iff b = 3+3k$ où $k \in \mathbb{Z}$

Les solutions de (E) sont donc dans l'ensemble $\{(6+5k; 3+3k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$

- Réciproquement, si $a = 6+5k$ et $b = 3+3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $3a - 5b = 3(6+5k) - 5(3+3k) = 18 + 15k - 15 - 15k = 3$ donc $(a; b)$ est solution de (E) .

L'ensemble solution de (E) est $\{(6+5k; 3+3k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

$\det(Q) = 6 \times 3 - 5 \times 3 = 18 - 15 = 3 \neq 0$ donc la matrice Q admet pour inverse la matrice

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Codage avec la matrice Q

On code le mot DO en utilisant le procédé décrit dans le texte :

$$DO \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 3 + 3 \times 14 \\ 5 \times 3 + 3 \times 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 57 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{IF}$$

3. Procédure de décodage

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que $Y = QX$.

a. $Y = QX \iff Q^{-1}Y = Q^{-1}QX \iff Q^{-1}Y = X \iff 3Q^{-1}Y = 3X \iff 3X = 3Q^{-1}Y$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \text{ donc } 3Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3X = 3Q^{-1}Y \iff 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 - 3y_2 \\ -5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x_1 = 3y_1 - 3y_2 \\ x_2 = -5y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

Or $y_1 \equiv r_1 \pmod{26}$ et $y_2 \equiv r_2 \pmod{26}$ donc on en déduit que $\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \pmod{26} \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \pmod{26} \end{cases}$

b. $9 \times 3 = 27$ et $27 \equiv 1 \pmod{26}$ donc $9 \times 3 \equiv 1 \pmod{26}$

$$\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \pmod{26} \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \pmod{26} \end{cases} \iff \begin{cases} 9 \times 3x_1 \equiv 9 \times 3r_1 - 9 \times 3r_2 \pmod{26} \\ 9 \times 3x_2 \equiv 9 \times (-5r_1 + 6r_2) \pmod{26} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv -45r_1 + 54r_2 \pmod{26} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \pmod{26} \end{cases}$$

car $-45 \equiv -2 \times 26 + 7 \pmod{26}$ et $54 \equiv 2 \times 26 + 2 \pmod{26}$

c. Le mot SG correspond à $R = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} r_1 = 18 \\ r_2 = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \pmod{26} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv 12 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 138 \pmod{26} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv 12 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 8 \pmod{26} \end{cases}$$

qui correspond au mot MI.

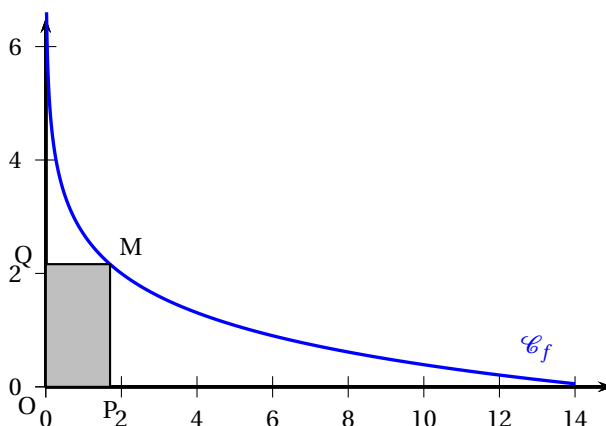
Exercice 4

Commun à tous les candidats

3 points

Soit f la fonction définie sur $]0 ; 14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à \mathcal{C}_f on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- On prend deux positions du point M et on compare les aires des rectangles obtenus.

- Si M est d'abscisse 2, son ordonnée est $f(2) = 2 - \ln(1) = 2$ donc l'aire du rectangle OPMQ vaut 4 unités d'aire.
- Si M est d'abscisse 4, son ordonnée est $f(4) = 2 - \ln(2)$ donc l'aire du rectangle OPMQ vaut $4 - 2\ln(2)$ qui est différente de 4.

Donc l'aire du rectangle OPMQ n'est pas constante.

- Le point M a pour abscisse x et pour ordonnée $f(x)$ donc l'aire du rectangle OPMQ est

$$\mathcal{A}(x) = x \times f(x) = 2x - x \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Étudions les variations de la fonction \mathcal{A} ; on remarque que $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2$ donc $\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{x}$

$$\mathcal{A}'(x) = 2 - \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \iff 1 > \ln\left(\frac{x}{2}\right) \iff e > \frac{x}{2} \iff x < 2e$$

$\mathcal{A}(2e) = 2 \times 2e - 2e \times \ln \frac{2e}{2} = 2e$ d'où le tableau de variation de la fonction \mathcal{A} :

x	0	$2e$	14
$\mathcal{A}'(x)$		+	-
$\mathcal{A}(x)$		↗ $2e$ ↘	

$f(2e) = 2 - \ln \frac{2e}{2} = 2 - 1 = 1$. donc l'aire du rectangle OPMQ est maximale pour le point M de coordonnées $(2e ; 1)$.

Exercice 5

Commun à tous les candidats

5 points

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.

Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

- On cherche T_3 :

$$T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 = 36,25 ; T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 = 45,8125 ; T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 = 53,940625$$

La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est approximativement de 54°C .

- Soit \mathcal{P}_n la propriété : $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

- Pour $n = 0$: $100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 \times 1 = 25 = T_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- On suppose la propriété vraie au rang $p \geq 0$, c'est-à-dire $T_p = 100 - 75 \times 0,85^p$.

D'après l'algorithme, on peut dire que, pour tout $n \geq 0$, $T_{n+1} = 0,85 \times T_n + 15$.

$$\text{Donc } T_{p+1} = 0,85(100 - 75 \times 0,85^p) + 15 = 85 - 75 \times 0,85^{p+1} + 15 = 100 - 75 \times 0,85^{p+1}$$

La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.

- La propriété \mathcal{P}_n est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $p \geq 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Pour tout entier naturel n , $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

3. La stérilisation débute dès que la température est supérieure à 85°C , donc on cherche n tel que $T_n > 85$:

$$\begin{aligned} T_n > 85 &\iff 100 - 75 \times 0,85^n > 85 \\ &\iff 15 > 75 \times 0,85^n \\ &\iff 0,2 > 0,85^n \\ &\iff \ln 0,2 > \ln(0,85^n) && \text{croissance de la fonction } \ln \\ &\iff \ln 0,2 > n \times \ln 0,85 && \text{propriété de la fonction } \ln \\ &\iff \frac{\ln 0,2}{\ln 0,85} < n && \text{car } \ln 0,85 < 0 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln 0,2}{\ln 0,85} \approx 9,9$ donc la stérilisation débute au bout de 10 minutes.

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec : $f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$.

1. a. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$f'(t) = -75 \times \left(-\frac{\ln 5}{10}\right) e^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7,5 \times \ln 5 e^{-\frac{\ln 5}{10}t} > 0 \text{ car } e^x > 0 \text{ pour tout réel } x.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

- b. $f(10) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10} \times 10} = 100 - 75e^{-\ln 5} = 100 - \frac{75}{e^{\ln 5}} = 100 - \frac{75}{5} = 85$

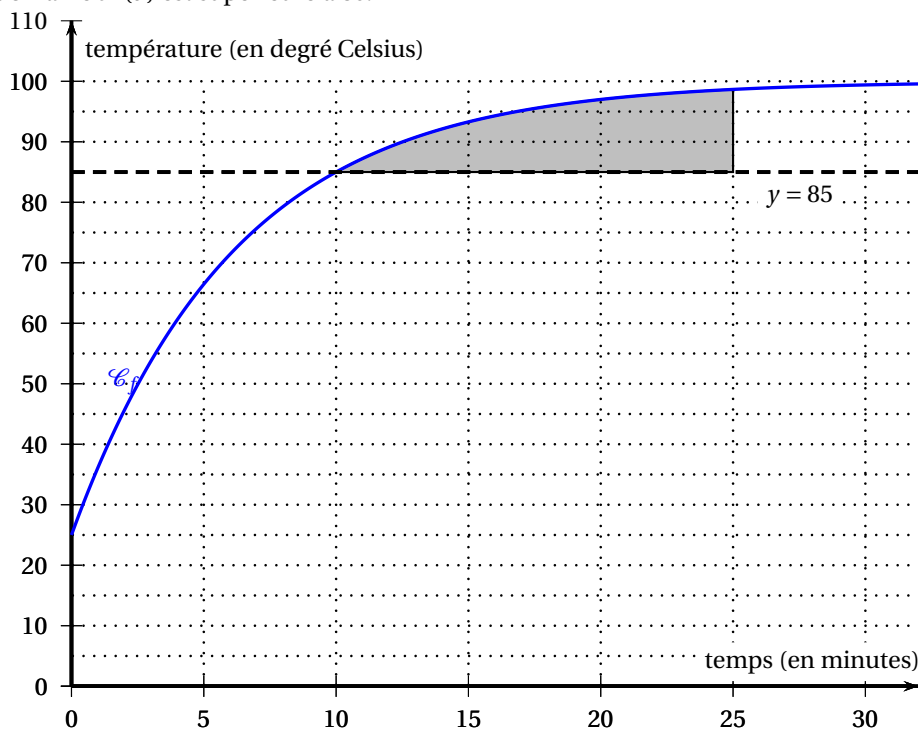
Or la fonction f est strictement croissante donc si $x \geq 10$, alors $f(x) \geq f(10)$ ce qui veut dire que $f(x) \geq 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$,

$y = 85$ et la courbe représentative \mathcal{C}_f de f .

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ , si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



a. $A(25)$ est représentée en gris sur le graphique ci-dessus. Chaque rectangle correspond à 5×5 unités d'aire. En comptant les rectangles inclus dans la partie grisée, on en compte 3 entiers plus un demi, ce qui fait $3,5 \times 25 = 87,5$ unités d'aire. Donc $\mathcal{A}(25) > 80$.

$$\begin{aligned} \text{b. } A(\theta) &= \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85) dt = \int_{10}^{\theta} \left[\left(100 - 75 \times e^{-\frac{\ln 5}{10} t} \right) - 85 \right] dt = \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75 \times e^{-\frac{\ln 5}{10} t} \right) dt \\ &= \int_{10}^{\theta} 15 dt - \int_{10}^{\theta} 75 \times e^{-\frac{\ln 5}{10} t} dt = 15 [t]_{10}^{\theta} - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10} t} dt = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10} t} dt \end{aligned}$$

c. La stérilisation est finie au bout de 20 minutes si $\mathcal{A}(20) > 80$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(20) &= 15(20 - 10) - 75 \int_{10}^{20} e^{-\frac{\ln 5}{10} t} dt = 150 - 75 \left[-\frac{10}{\ln 5} e^{-\frac{\ln 5}{10} t} \right]_{10}^{20} = 150 + \frac{750}{\ln 5} \left[e^{-2 \ln 5} - e^{-\ln 5} \right] \\ &= 150 + \frac{750}{\ln 5} \left[\left(e^{-\ln 5} \right)^2 - e^{-\ln 5} \right] = 150 + \frac{750}{\ln 5} \left[\left(\frac{1}{5} \right)^2 - \frac{1}{5} \right] = 150 + \frac{750}{\ln 5} \left[\frac{1}{25} - \frac{1}{5} \right] \\ &= 150 + \frac{750}{\ln 5} \times \frac{-4}{25} = 150 - \frac{120}{\ln 5} \approx 75,44 < 80 \end{aligned}$$

Donc la stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes.