

Corrigé du baccalauréat S Polynésie
10 juin 2010

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombre réels.

On note \bar{z} , le nombre complexe défini par $\bar{z} = a - bi$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z' , $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.
Démonstrations par le calcul et par récurrence.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Calculons $(-z)(-z)(-z)(-z) = z^4 = -4$, donc $-z$ est aussi solution de l'équation (E).
De même $\bar{z} \times \bar{z} \times \bar{z} \times \bar{z} = (\bar{z} \times \bar{z}) \times (\bar{z} \times \bar{z}) = \overline{z^2} \times \overline{z^2}$ (d'après la R. O. C. 2. et toujours d'après la même formule) $= \overline{z^4} = \overline{-4} = -4$, car $-4 \in \mathbb{R}$.
Donc \bar{z} est aussi solution de (E).
2. a. $z_0 = 1 + i$, donc $|z_0|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow |z_0| = \sqrt{2}$.
On peut en factorisant écrire :
$$z_0 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b. On a $z_0^4 = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^4 = (\sqrt{2})^4 \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^4 = 4 (e^{i\pi}) = 4 \times (-1) = -4$.
 z_0 est bien une solution de l'équation (E).
3. D'après la question B. 1. $-z_0 = -1 - i$ et $\bar{z}_0 = 1 - i$ sont aussi solutions; mais puisque \bar{z}_0 est solution son opposé $-\bar{z}_0 = -1 - i$ l'est aussi.
Conclusion : $1 + i$, $1 - i$, $-1 - i$ et $-1 + i$ sont solutions de (E).

Partie C

1. D'après le cours l'écriture complexe de la rotation de centre C d'affixe $-1 - i$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est :

$$z' - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}} (z - z_C) \iff z' = -1 - i + e^{-i\frac{\pi}{3}} (z + 1 + i),$$

z étant l'affixe d'un point et z' celle de son image par r .

2. a. On a donc $z_E = -1 - i + e^{-i\frac{\pi}{3}} (-1 + i + 1 + i) =$
 $-1 - i + \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \times 2i = -1 - i + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times 2i = -1 - i + i + \sqrt{3} = z_E = -1 + \sqrt{3}$.

- b. De même $z_F = 1 - i + e^{-i\frac{2\pi}{3}}(1 + i + 1 - i) = 1 - i + (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) \times 2 = 1 - i + (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \times 2 = 1 - i - 1 - i\sqrt{3} = z_E = -i(1 + \sqrt{3})$.
- c. $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{1 + i + 1 - \sqrt{3}}{1 + i + i(1 + \sqrt{3})} = \frac{[2 + \sqrt{3} + i][1 - i(2 + \sqrt{3})]}{[1 + i(2 + \sqrt{3})][1 - i(2 + \sqrt{3})]} = \frac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{1 + (2 + \sqrt{3})^2} = \frac{4}{1 + 4 + 3 + 4\sqrt{3}} = \frac{4}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}_+$.
- d. $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ réel positif entraîne que $\arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EA}) = 0 \pmod{2\pi}$ ce qui signifie que les points A, E et F sont alignés.

Exercice 2**3 points***Commun à tous les candidats.***Partie A - Un seul robot**

1. Soient $p(S)$, $p(I)$ et $p(X)$ les probabilités respectives de passer par les points S, I et X.

On a $p(S) = p(X)$ et $p(S) = 2p(I)$.

Donc $p(S) = p(X) = 2p(I)$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(S) + p(X) + p(I) = 1 \iff 2p(I) + 2p(I) + p(I) = 1 \iff 5p(I) = 1 \iff p(I) = \frac{1}{5} = 0,2.$$

On en déduit que $p(S) = p(X) = \frac{2}{5}$.

2. On a de façon évidente :

$$p(E) = p(S) \times p_S(I) \times p_I(X) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{125}.$$

3. La probabilité de F est la somme des probabilités de parcourir les « chemins » :

SIX, SXI, ISX, IXS, XIS et XSI.

Comme on l'a vu à la question précédente la probabilité de parcourir l'un de ces chemins est égale à

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{125}, \text{ donc finalement :}$$

$$p(F) = 6 \times \frac{4}{125} = \frac{24}{125} = \frac{192}{1000} = 0,192.$$

Partie B - Plusieurs robots

La probabilité qu'un robot ne passe pas par les sommets S, I et X dans cet ordre est d'après la question précédente : $1 - \frac{4}{125} = \frac{121}{125}$, donc la probabilité qu'aucun des n robots ne passe par les sommets S, I et X

dans cet ordre est $\left(\frac{121}{125}\right)^n$ (loi binomiale de paramètres n et $\frac{121}{125}$).

La probabilité qu'au moins un robot passe par les sommets S, I et X dans cet ordre est donc $1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n$.

Il faut donc résoudre :

$$1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n \geq 0,99 \iff \left(\frac{121}{125}\right)^n \leq 0,01 \iff \left(\frac{121}{125}\right)^n \leq 10^{-2}, \text{ soit en prenant les logarithmes de ces nombres positifs, } n \ln\left(\frac{121}{125}\right) \leq -2 \ln 10 \iff n \geq \frac{-2 \ln 10}{\ln\left(\frac{121}{125}\right)} \approx 141,5.$$

Il faut donc au minimum 142 robots.

Exercice 3

5 points

Enseignement obligatoire

1. Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(2; 1; -1)$.
 Une équation d'un plan normal à \overrightarrow{AB} est donc de la forme $2x + 1y - 1z + d = 0$.
 $B(3; 2; 0) \in (P) \iff 2 \times 3 + 2 - 0 + d = 0 \iff d = -8$.
 $M(x; y; z) \in (P) \iff 2x + y - z - 8 = 0$.
2. D'après la question précédente : $AB^2 = 4 + 1 + 1 = 6 \Rightarrow AB = \sqrt{6}$.
 $M(x; y; z) \in (S) \iff AM^2 = AB^2 \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6 \iff$
 $M(x; y; z) \in (S) \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 3 = 0$.
 (On peut calculer que les coordonnées de B vérifient cette équation.)
3. a. On a $d(A, (Q)) = \frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.
 Comme la distance de A au plan (Q) est égale au rayon de la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{6}$, on en déduit que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).
- b. On calcule $d(A, (P)) = \frac{|2+1-1-8|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.
 La réponse est donc : oui.
4. a. (P) a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}(2; 1; -1)$ et (Q) a pour vecteur normal $\vec{p}(1; -1; 2)$.
 Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles : ils sont donc sécants
 Les vecteurs normaux respectivement à (P) et à (Q) ne sont pas orthogonaux
- b. Si $M(x; y; z) \in (D) = (P) \cap (Q)$, $(x; y; z)$ vérifie le système :
- $$\begin{cases} 2x + y - z - 8 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ 2x + y - z - 8 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y - z = -2t + 8 \\ -y + 2z = -t - 4 \end{cases} \Rightarrow$$
- (par somme) $z = -3t + 4$ puis en remplaçant dans la première équation
 $y = z - 2t + 8 = -3t + 4 - 2t + 8 = -5t + 12$.
- Donc $M(x; y; z) \in (D) \iff \begin{cases} x = t \\ y = -5t + 12 \\ z = -3t + 4 \end{cases}$.
- c. $A(1; 1; 1) \in (D) \iff \begin{cases} 1 = t \\ 1 = -5t + 12 \\ 1 = -3t + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = t \\ -\frac{11}{5} = t \\ 1 = t \end{cases}$
- Conclusion : $A \notin (D)$.
- d. *Méthode 1*
- On a $\overrightarrow{AB}(2; 1; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 1; 2)$, donc $AB^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6$ et $AC^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$.
 $AB^2 = AC^2 \Rightarrow AB = AC$: A est donc équidistant de B et de C.
 - Soit M un point de (D), donc $M(t; 12 - 5t; 4 - 3t)$ et par conséquent $\overrightarrow{BM}(t-3; 10-5t; 4-3t)$ et $\overrightarrow{CM}(t; 10-5t; 5-3t)$.
 D'où $BM^2 = (t-3)^2 + (10-5t)^2 + (4-3t)^2 = t^2 + 9 - 6t + 100 + 25t^2 - 100t + 16 + 9t^2 - 24t = 35t^2 - 130t + 125$.
 De même $CM^2 = t^2 + (10-5t)^2 + (5-3t)^2 = t^2 + 100 + 25t^2 - 100t + 25 + 9t^2 - 30t = 35t^2 - 130t + 125$.
 On a $BM^2 = CM^2 \Rightarrow BM = CM$, donc tout point de (D) est équidistant de B et de C.
 Conclusion : tout point de (Q) défini par A et la droite (D) est équidistant de B et de C (plan médiateur de [BC]).

Méthode 2

Les vecteurs $\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{vmatrix}$ et $\vec{AI} \begin{vmatrix} -1 \\ 11 \\ 3 \end{vmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (R). Donc tout point du plan (R) a pour coordonnées :

$$M \begin{cases} x = 1 - k + l \\ y = 1 + 11k - 5l \\ z = 1 + 3k - 3l \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } l \in \mathbb{R}$$

Calculons, pour tout k et tout l , $BM^2 - CM^2$:

$$\begin{aligned} BM^2 - CM^2 &= (1 - k + l - 3)^2 + (1 + 11k - 5l - 2)^2 + (1 + 3k - 3l)^2 - (1 - k + l)^2 - (1 + 11k - 5l - 2)^2 - \\ &\quad (1 + 3k - 3l + 1)^2 \\ &= (-2 - k + l)^2 + (1 + 3k - 3l)^2 - (1 - k + l)^2 - (2 + 3k - 3l)^2 \\ &= (-2 - k + l - 1 + k - l)(-2 - k + l + 1 - k + l) + (1 + 3k - 3l - 2 - 3k + 3l) \\ &\quad (1 + 3k - 3l + 2 + 3k - 3l) \\ &= (-3)(-1 - 2k + 2l) + (-1)(3 + 6k - 6l) = 3 + 6k - 6l - 3 - 6k + 6l = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, tout point M du plan (R) est équidistant de B et C.

Méthode 3 Avec le plan médiateur de [BC] :

On a $\vec{BC}(-3; 0; -1)$ et le milieu I de [BC] a pour coordonnées $I(\frac{3}{2}; 2; -\frac{1}{2})$.

Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan médiateur de [BC] si, et seulement si $\vec{IM} \cdot \vec{BC} = 0 \iff -3(x - \frac{3}{2}) + 0 \times (y - 2) - 1(z + \frac{1}{2}) = 0$
 $\iff -3x - z + 4 = 0$.

Or $-3 \times 1 - 1 + 4 = 0$ est vraie ce qui signifie que $A(1; 1; 1)$ appartient au plan médiateur;

De même $-3t - (4 - 3t) + 4 = 0$ est vraie ce qui signifie que tout point M de (D) appartient au plan médiateur de [BC].

Le point A et tout point de (D) sont donc équidistants de B et de C, donc tout point du plan défini par A et la droite (D) est équidistant de B et de C.

Exercice 3**5 points***Enseignement de spécialité**Les parties A et B sont indépendantes***Partie A**

1. Le couple (1; 1) est une solution évidente de (E)

2. On a donc : $\begin{cases} 7x - 6y = 1 \\ 7 \times 1 - 6 \times 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow (\text{par différence}) 7(x - 1) - 6(y - 1) = 0 \quad [1]$
 $\iff 7(x - 1) = 6(y - 1)$.

Comme 7 divise $6(y - 1)$ et est premier avec 6, 7 divise $y - 1$ (Gauss) : il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 1 = 7k \iff y = 7k + 1$ et en reportant dans [1] $7(x - 1) = 6 \times 7k \iff x - 1 = 6k \iff x = 6k + 1$.

On vérifie aisément que tout couple $(6k + 1; 7k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$ vérifie l'équation (E).

Les couples solutions sont les couples d'entiers $(6k + 1; 7k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1. — Si $m = 1$, (F) s'écrit $7^n - 6 = 1 \iff 7^n = 7$, d'où $n = 1$. Le couple $(1; 1)$ est solution.
 — Si $m = 2$, (F) s'écrit $7^n - 12 = 1 \iff 7^n = 13$ or 7 ne divise pas 13 : pas de solution;
 — Si $m = 3$, (F) s'écrit $7^n - 24 = 1 \iff 7^n = 25$ or 7 ne divise pas 25 : pas de solution;
 — Si $m = 4$, (F) s'écrit $7^n - 48 = 1 \iff 7^n = 49$ d'où $n = 2$. Le couple $(2; 4)$ est solution.
2. a. Comme $m \geq 5$, il existe p tel que $m = 5 + p$.
 $(n; m)$ vérifie (F) donc $7^n - 3 \times 2^m = 1 \iff 7^n = 1 + 3 \times 2^{5+p} = 1 + 3 \times 2^5 \times 2^p = 1 + 3 \times 32 \times 2^p$.
 Comme $3 \times 32 \times 2^p \equiv 0 \pmod{32}$, il en résulte que $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
 b. On a $7 \equiv 7 \pmod{32}$;
 $7^2 \equiv 17 \pmod{32}$;
 $7^3 \equiv 23 \pmod{32}$;
 $7^4 \equiv 1 \pmod{32}$.
 À partir de là on retrouve de manière cyclique 7, 17, 23, 1 comme restes dans la division par 32.
 Les puissances de 7 dont le reste dans la division par 32 est égal à 1 sont donc celles dont l'exposant n est un multiple de 4.
 c. D'après les deux questions précédentes si un couple $(n; m)$ est solution de (F), alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$ et n est un multiple de 4.
 Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$, d'où en reportant $7^{4k} \equiv 1 \pmod{32} \iff (7^4)^k \equiv 1 \pmod{32} \iff 2401^k \equiv 1 \pmod{32}$.
 Or $2401 = 5 \times 480 + 1$, c'est-à-dire que $2401 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow (2401)^k \equiv 1^k \pmod{5} \iff 7^n \equiv 1 \pmod{5}$ en revenant à l'écriture initiale de la puissance.
 d. Soit $(n; m)$ un couple solution de (F); donc

$$\begin{cases} 7^n - 3 \times 2^m = 1 \\ 7^n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow -3 \times 2^m \equiv 0 \pmod{5}.$$
 Ceci n'est pas possible puisque 5 ne divise ni 2, ni 3.
 Conclusion : il n'existe pas de couple solution avec un second terme supérieur à 4.
3. D'après les questions 1. et 2. les seuls couples solutions de (F) sont $(1; 1)$ et $(2; 4)$.

Exercice 4

7 points

Commun à tous les candidats.

L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Partie A

1. a. • La fonction $x \mapsto \ln(2x)$ est la composée des fonctions $x \mapsto 2x$ et $X \mapsto \ln(X)$ qui sont dérivables respectivement sur $]1; +\infty[$ et $\ln 2; +\infty[$.
 La fonction g somme de fonctions dérivables sur $]1; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et

$$g'(x) = \frac{2}{2x} - 1 \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$
 Comme $x > 0$, cette dérivée est du signe du numérateur $1 - x$.
 Donc $g'(x) = \iff x = 1$,
 $g'(x) < 0 \iff 1 < x$.
 Conclusion : la fonction g est décroissante sur $]1; +\infty[$.

- D'autre part $g(1) = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2$.
En écrivant $g(x) = 2x \left(\frac{\ln(2x)}{2x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \right)$.
On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ puis par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
 - La fonction g est donc dérivable donc continue sur $[1 ; +\infty[$ et décroissante de $\ln 2$ à moins l'infini : il existe donc un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$.
- b.** D'après la question précédente $g(\alpha) = 0 \iff \ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0 \iff \alpha = \ln(2\alpha) + 1$.
- 2. a.** En allant « verticalement » vers la courbe (Γ) et « horizontalement » vers la droite d'équation $y = x$, on obtient quatre points de cette droite dont les abscisses sont u_0, u_1, u_2, u_3 .
Voir la figure.
- b.** Par récurrence :

- Initialisation : comme $u_0 = 1$ et $u_1 = \ln(2) + 1 \approx 1,69 < 3$, on a bien :

$$1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3.$$

- Hérité :
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ (1).
Donc $u_{n+2} = \ln(2u_{n+1}) + 1$.
Or (1) implique par produit par 2 :
 $2 \leq 2u_n \leq 2u_{n+1} \leq 6$, puis
 $\ln 2 \leq \ln(2u_n) \leq \ln(2u_{n+1}) \leq \ln 6$ et enfin
 $1 + \ln 2 \leq \ln(2u_n) + 1 \leq \ln(2u_{n+1}) + 1 \leq \ln 6 + 1$ soit
 $1 + \ln 2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ln 6 + 1$.
Comme $1 + \ln 6 \approx 2,791 < 3$, on en déduit finalement que
 $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

- c.** On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \leq 3$.

Comme la fonction g est continue, la fonction définie par $g(x) + x$ l'est aussi et à la limite on a donc :

$\ell = \ln(\ell) + 1$. Or on a vu à la question 1. b. que α était la solution de cette équation.

Conclusion $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Partie B

- 1. a.** La fonction f produit de fonctions dérivables sur $[1 ; +\infty[$ est dérivable et par conséquent continue sur cet intervalle.

On sait alors que $F(x)$ est une primitive de f sur $[1 ; +\infty[$. On a donc $F'(x) = f(x)$.

Or sur $[1 ; +\infty[$, $x - 1 \geq 0$ et $e^{1-x} > 0$ quel que soit le réel x , donc par produit $f(x) \geq 0$.

La dérivée de F étant positive, la fonction F est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

- b.** On pose : $\begin{cases} u(t) &= t-1 \\ v'(t) &= e^{1-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) &= 1 \\ v(t) &= -e^{1-t} \end{cases}$

Toutes les fonctions étant continues car dérivable sur $[1 ; +\infty[$, on a par intégration par parties :

$$F(x) = [-(t-1)e^{1-t}]_1^x - \int_1^x -e^{1-t} dt = [-(t-1)e^{1-t}]_1^x - [e^{1-t}]_1^x = [-te^{1-t}]_1^x \\ = -xe^{1-x} - (1e^0) = 1 - xe^{1-x}.$$

c. On a $F(x) = \frac{1}{2} \iff 1 - xe^{1-x} = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} = xe^{1-x} \iff$

(les deux membres étant supérieur à zéro et par croissance de la fonction \ln) $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(xe^{1-x}) \iff$

$$-\ln 2 = \ln x + (1 - x) \iff$$

$$\ln 2 + \ln x + 1 - x = 0 \iff \ln(2x) + 1 = x.$$

2. On a vu que sur $[1 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$, donc l'aire de la partie \mathcal{D}_a est égale à l'intégrale $F(a)$.

Résoudre $F(a) = \frac{1}{2}$ a été fait à la question précédente et sa solution est le nombre vérifiant $\ln(2x) + 1 = x$; or on a vu à la question 1. b. que ce nombre est le nombre α

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 4

