Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2009

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\text{e}^{-x}.$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

   b. Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de f.

   c. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale : $I(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\text{d}x$.

   a. Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.

   b. À l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :

   $$I(a) = 2 - 2\text{e}^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

   c. En déduire pour tout nombre réel a :

   $$\frac{1}{2}\text{e}^{a}I(a) = \text{e}^{a} - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

3. Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \text{e}^x$ et $h(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g et $\mathscr{P}$ celle de h.

   a. Montrer que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ ont la même tangente au point d'abscisse 0.

   b. Déduire des questions précédentes la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

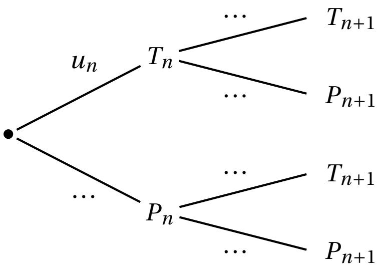
— T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
— P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. **a.** Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.
   b. Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.
   c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



   d. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.
   e. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
   b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en **1. e.** ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) :

$$3x + 7y = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

   a. Déterminer un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.
   En déduire une solution particulière $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ de l'équation (E).
   b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de (E).
2. On considère l'équation notée (G)

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

   a. Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
   Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On considère le cube ABCDEFGH représenté sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2\,;\ 1\,;\ 1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{IK}}$ et à $\overrightarrow{\text{IJ}}$.
   En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x+2y+2z-5=0$.
3. **a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).
   b. En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{4}\,;\ 1\,;\ 0\right)$.
   c. Placer le point R sur la figure.
4. Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.
5. **a.** Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.
   b. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre G passant par F.
   Justifier que la sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont sécants.
   Déterminer le rayon de leur intersection.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_\text{A}=1+\text{i}\sqrt{3}$, $z_\text{B}=2\text{i}$.

1. **a.** Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.
   b. Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
   c. Déterminer la nature du triangle OAB.
2. On note r la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point M d' affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe du point M'.
   a. Calculer un argument du quotient $\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}}$. Interpréter géométriquement ce résultat.
   b. En déduire l'écriture complexe de la rotation r.

3. Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O.
Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' (autre que O). On note z_{C} son affixe.

a. Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r.

b. Calculer l'affixe z_{I} du milieu I de [AB].

c. Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

d. En déduire que I est le milieu de [OC] puis montrer que l'affixe de C est :

$$z_{\text{C}} = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\text{i}.$$

4. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = 2\text{i}\sqrt{3}$.

a. Justifier que le point D appartient au cercle Γ. Placer D sur la figure.

b. Placer D$'$ image de D par la rotation r définie à la question 2.
On note $z_{\text{D}'}$ l'affixe de D$'$.
Montrer que $z_{\text{D}'} = -\sqrt{3} + 3\text{i}$.

5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{DC}}$ et $\overrightarrow{\text{DD}'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

ANNEXE

Exercice 3

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie