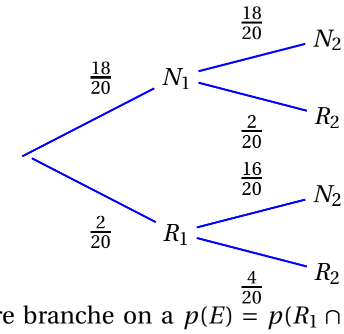
Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Métropole & La Réunion septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1.



2. En suivant la dernière branche on a $p(E) = p(R_1 \cap R_2 = p(R_1) \times p_{R_1}(\mathrm{R}_2) = \dfrac{2}{20} \times \dfrac{4}{20} = \dfrac{8}{400} = \dfrac{2}{100} = 0,02$.

$p(F) = p(R_1 \cap \mathrm{N}_2) + p(N_1 \cap R_2) = \dfrac{18}{20} \times \dfrac{2}{20} + \dfrac{2}{20} \times \dfrac{16}{20} = \dfrac{36}{400} + \dfrac{32}{400} = \dfrac{68}{400} = \dfrac{17}{100} = 0,17$.

3. a. On a la loi de probabilités suivante :

issue	RR	RN ou NR	NN
X	9	1	-1
$p\,(X = x_i)$	0,02	0,17	0,81

car $p(\mathrm{NN}) = 1 - (0,02 + 0,17) = 0,81$.

b. On a $\mathrm{E}(X) = 0,02 \times 9 + 0,17 \times 1 + 0,81 \times (-1) = 0,18 + 0,17 - 0,81 = -0,46$ €. Ce qui signifie qu'en moyenne on perd à ce jeu près d'un demi-euro par partie.

4. a. On a une épreuve de Bernoulli avec une probabilité de lancer la roue B égale à $\dfrac{2}{20}$. La probabilité de ne jamais lancer la roue B en n parties est égale à $\left(1 - \dfrac{2}{20}\right) = 0,9^n$.

Donc la probabilité de lancer au moins une fois la roue B (évènement contraire de l'évènement précédent) est $p_n = 1 - 0,9^n$.

b. Comme $-1 < 0,9 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$. La suite est convergente

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$? On a $p_n > 0,9 \iff 1 - 0,9^n > 0,9 \iff 0,1 > 0,9^n \iff \ln 0,1 > n \ln 0,9$, par croissance de la fonction ln.

$\ln 0,1 > n \ln 0,9 \iff n > \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,9}$ car $\ln 0,9 < 0$. Finalement $n > 21,8$.

La probabilité de lancer la roue B sera supérieure à 90 % à partir de la 22^e^ partie.

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Comme $x \neq 0$ et f dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, g est dérivable sur cet intervalle et $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

   Or f solution de (E) signifie que $xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2 \iff$ $\dfrac{xf'(x) - (2x+1)f(x)}{x^2} = 8$ (car $x \neq 0$) $\iff \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - \dfrac{2f(x)}{x} = 8 \iff$ $g'(x) - 2g(x) = 8$ qui signifie que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E') :

   $$y' = 2y + 8.$$

   b. h solution de (E') montre que h est dérivable, donc f aussi.

   De $f(x) = xh(x)$, on tire $f'(x) = h(x) + xh'(x)$.

   h solution de $(E') \iff h'(x) = 2h(x) + 8 \iff xh'(x) = 2xh(x) + 8x \iff$ $f'(x) - h(x) = 2f(x) + 8x \iff xf'(x) = 2xf(x) + f(x) + 8x^2 \iff$ $xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$, ce qui signifie que f est solution de l'équation différentielle (E).

2. Résolution de $y' = 2y + 8$:

   — On sait que la fonction constante $x \longmapsto -\dfrac{8}{2} = -4$ est solution de l'équation ;

   — Les solutions de l'équation $y' = 2y$ sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto K\mathrm{e}^{2x},\ K \in \mathbb{R}$.

   Les solutions de (E') sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto K\mathrm{e}^{2x} - 4,\ K \in \mathbb{R}$.

3. Il faut chercher une fonction f de la forme $f(x) = Kx\mathrm{e}^{2x} - 4x$ telle que

   $f(\ln 2) = 0 \iff K\ln 2\mathrm{e}^{2\ln 2} - 4\ln 2 = 0 \iff K\ln 2\mathrm{e}^{\ln 2^2} - 4\ln 2 = 0 \iff$ $K\ln 2\mathrm{e}^{\ln 4} - 4\ln 2 = 0 \iff 4K\ln 2 - 4\ln 2 = 0 \iff 4K - 4 = 0 \iff K = 1$.

   Il existe bien une solution de (E) qui s'annule en $\ln 2$: la fonction

   $$x \longmapsto x\mathrm{e}^{2x} - 4x.$$

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) $\iff m+2 \neq 0$ et C est le barycentre des points pondérés (A, m), (I, 2) $\iff m\overrightarrow{\mathrm{CA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CI}} = \overrightarrow{0} \iff m\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{0} \iff (m+1)\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{0} \iff m+1 = 0 \iff m = -1$. Réponse **c.**

2. **a.** Faux car l'angle est de $-\dfrac{\pi}{2}$;

   b. Faux car le rapport est égal à $\dfrac{3}{2}$;

   c. Faux : DAB a pour image BCD ;

   d. Ceci signifie que $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DB}} \iff \overrightarrow{\mathrm{IJ}} =$ $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) =$ $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DA}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DA}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ et cette dernière égalité est vraie. Réponse **d.**

3. $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right| = \text{AB} \iff \left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right\| = \text{AB} \iff \left\|2\overrightarrow{MI}\right\| = \text{AB} \iff$ $2M\text{I} = \text{AB} \iff \text{I}M = \dfrac{1}{2}\text{AB}$, ce qui signifie que M appartient au cercle de centre I et de rayon $\dfrac{1}{2}\text{AB}$, qui est bien le cercle inscrit dans le carré.
Réponse **d.**
4. Par associativité, le barycentre de (A, 2), (B, 1) et (D, 1) est celui de (A, 2) et (I, 2) soit le point J de poids 4. Donc $2\overrightarrow{\text{JA}}+\overrightarrow{\text{JB}}+\overrightarrow{\text{JD}}=\overrightarrow{0}$. Il en résulte avec la relation de Chasles que
$\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0 \iff \left(2\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{MJ}\right)\cdot\overrightarrow{\text{CA}}=0 \iff$ $4\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{\text{CA}}=0 \iff \overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{\text{CA}}=0$ qui signifie que $(M\text{J})$ est perpendiculaire à (CA), donc M appartient à la médiatrice de [CA]. Réponse **c.**

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. On calcule $J_{n+1}-J_n=\int_1^{n+1}\text{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\text{d}t-\int_1^{n}\text{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\text{d}t=\int_n^{n+1}\text{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\text{d}t$.
Pour $t\in[n\,;\,n+1]$, $\sqrt{1+t}>0$ et $\text{e}^{-t}>0$.
L'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle où $n<n+1$ est positive, donc $J_{n+1}-J_n\geqslant 0 \iff J_{n+1}J_n\geqslant J_n$, ce qui montre que la suite (J_n) est croissante.
2. **a.** Posons $u=t+1$, donc $u\geqslant 2$; or $0\leqslant\sqrt{u}\leqslant u$, sur $[2\,;\,+\infty]$, car $0\leqslant u\leqslant u^2$.
Remarque : en fait relation est vraie pour $t\geqslant 0$.
b. $\sqrt{t+1}\leqslant t+1 \iff \sqrt{t+1}\text{e}^{-t}\leqslant(t+1)\text{e}^{-t}$ ce qui entraîne que
$\displaystyle\int_1^n\text{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\text{d}t\leqslant\int_1^n\text{e}^{-t}(1+t)\,\text{d}t \iff J_n\leqslant I_n$.
c. Intégrons par parties :
$$\left\{\begin{array}{lcl}u(t)&=&t+1\\ \text{d}v(t)&=&\text{e}^{-t}\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{lcl}\text{d}u(t)&=&1\\ v(t)&=&-\text{e}^{-t}\end{array}\right.$$
Les fonctions dérivées ci-dessus étant continues
$I_n=\left[-(t+1)\text{e}^{-t}\right]_1^n-\displaystyle\int_1^n-\text{e}^{-t}\,\text{d}t=\left[-(t+1)\text{e}^{-t}\right]_1^n+\left[\text{e}^{-t}\right]_1^n=$
$\left[-(t+2)\text{e}^{-t}\right]_1^n=\boxed{-(n+2)\text{e}^{-n}+3\text{e}^{-1}}$.
Comme $(n+2)\text{e}^{-n}\geqslant 0$, I_n est donc majorée par 3e^{-1}.
d. L'inégalité démontrée au **b.** montre que $J_n\leqslant 3\text{e}^{-1}$.
La suite (J_n) est donc majorée et croissante : elle a donc une limite inférieure ou égale à 3e^{-1}.

EXERCICE 5 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $z_{I'}=\dfrac{z_\text{I}-5}{z_\text{I}-1}=\dfrac{3+\text{i}-5}{3+\text{i}-1}\dfrac{-2+\text{i}}{2+\text{i}}=\dfrac{(-2+\text{i})(2-\text{i})}{4+1}=-\dfrac{3}{5}+\text{i}\dfrac{4}{5}$.
On a $\left|z_{\text{I}'}\right|^2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}+\dfrac{16}{25}=1\Rightarrow\left|z_{\text{I}'}\right|=1$.
Donc I$'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. **a.** $z'=\dfrac{z-5}{z-1}\Rightarrow|z'|=\left|\dfrac{z-5}{z-1}\right| \iff |z'|=\dfrac{|z-5|}{|z-1|}| \iff \text{O}M'=\dfrac{\text{B}M}{\text{A}M}=\dfrac{M\text{B}}{\text{A}M}$.

b. De même avec les arguments : $z' = \dfrac{z-5}{z-1} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{A}M},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$.

Partie B

1. Si M appartient à (Δ), il a pour affixe $3+\alpha\mathrm{i}$.

On a $\mathrm{O}M' = |z'| = \dfrac{|-2+\alpha\mathrm{i}|}{|2+\alpha\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{4+\alpha^2}} = 1$, donc $M' \in \mathscr{C}$.

2. a. M appartient à la médiatrice de [AB], donc est équidistant de A et de B ; $M\mathrm{A} = M\mathrm{B}$ entraîne que que $M\mathrm{AB}$ est isocèle en M.

A et N appartiennent à au cercle $\mathscr{C}$, donc $\mathrm{OA} = \mathrm{O}N$ et le triangle $\mathrm{AO}N$ est isocèle en O.

Par symétrie autour de (T), $\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\ \overrightarrow{\mathrm{A}N}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\ \overrightarrow{\mathrm{O}N}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$.

b. Le point image M' est le point N. On peut au lieu d'utiliser la symétrie autour de (T) construire le symétrique M_1 de M autour de [Ox). La droite (AM_1) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M'.

EXERCICE 5 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. a. L'écriture complexe de la similitude est $z' = kz\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

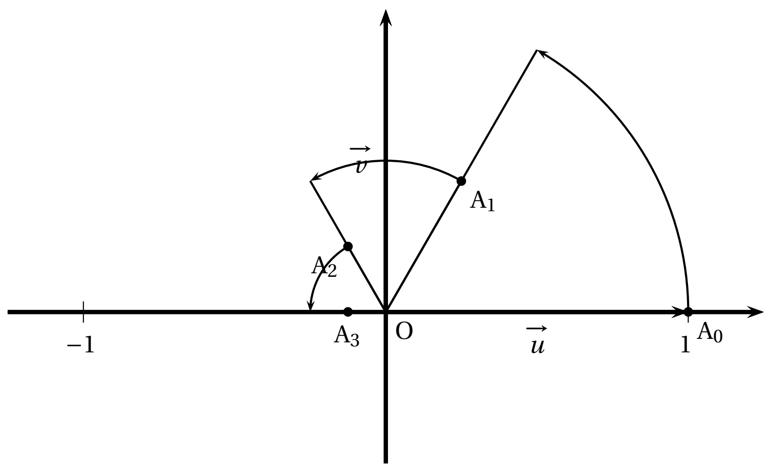
b. $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$; son affixe est 1 ;

$\mathrm{A}_1 = f(\mathrm{A}_0)$: son affixe est $\dfrac{1}{2} \times 1 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

$\mathrm{A}_2 = f(\mathrm{A}_1)$: son affixe est $\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{8} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{8}$;

$\mathrm{A}_3 = f(\mathrm{A}_2)$: son affixe est $\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{8} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{8}$.

On fait à chaque fois une rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis une homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$.



2. **a.** *Initialisation* : $z_0 = k^0 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\times 0\pi}{3}} = 1$ la relation est vraie au rang 0 ;
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $z_n = k^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}$.
Alors $z_{n+1} = kz_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = kk^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = k^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\pi}{3}}$. La relation est donc vraie au rang $n+1$.
La relation est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n, elleest vraie au rang $n+1$: on a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}$.

b. $A_n \in \left[\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right) \iff z_n$ a un argument nul à 2π près.
Soit $\dfrac{n\pi}{3} \equiv 0 \quad [2\pi] \iff n \equiv 0 \quad [6]$ ou encore si n est multiple de 6.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. $2\,008 = 2^3 \times 251$
2. k^6 est un multiple de 2008 si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que
$k^6 = \alpha \times 2^3 \times 251$
Il faut donc que dans la décomposition de k il y ait au moins un facteur 2 et un facteur 251, 2 et 251 étant premiers entre eux : la plus petite valeur de k est donc $2 \times 251 = 502$.
3. On a vu qu'il fallait que n soit multiple de 6 et que la plus petite valeur de k est 512.
Donc z_n est un entier multiple de 2008, si n est un multiple de 6 et k un multiple de 502.