Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers 8 juin 2016

Exercice 1 Commun à tous/toutes les candidats/e/s 4 points

Affirmation 1

Soit M la variable aléatoire égale à la masse d'une baguette. Par hypothèse, M suit la loi normale de moyenne 200 et d'écart-type 10.
Il s'agit de vérifier si $\text{P}(M > 187) > 0,9$. La calculette donne

$$P(X \leqslant 187) \simeq 0,0968$$

On en déduit :

$$P(X > 187) = 1 - P(X \leqslant 187) \simeq 0,903$$

L'affirmation 1 est vraie.

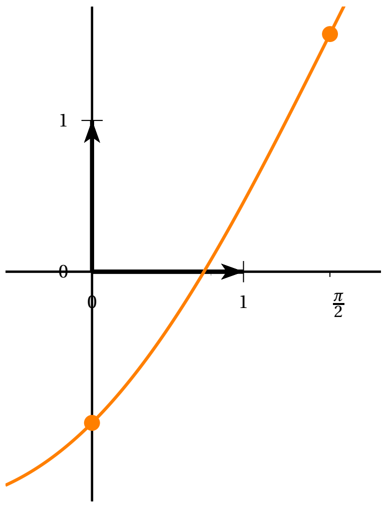
Affirmation 2

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On en déduit que la fonction $x \mapsto -\cos x$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
La fonction f est alors strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ comme somme des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\cos x$, strictement croissantes sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Elle est également continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On a par ailleurs $\left\{\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ \text{et} \\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$.

Puisque $0 \in [-1, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

L'affirmation 2 est vraie.



Affirmation 3

Déterminons l'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ en résolvant le système $\left\{\begin{array}{lcl} 1+2t &=& -5t'+3 \\ 2-3t &=& 2t' \\ 4t &=& t'+4 \end{array}\right. \quad (S)$

$(S) \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2t+5t' &=& 2 \\ 3t+2t' &=& 2 \\ 4t-t' &=& 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t' = 4t-4 && \\ 2t+5(4t-4) &=& 2 \\ 3t+2(4t-4) &=& 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t' = 4t-4 && \\ 22t &=& 22 \\ 11t &=& 10 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} t' &=& 4t-4 \\ t &=& 1 \\ t &=& \frac{10}{11} \end{array}\right.$ Puisque le système n'a pas de solution, alors les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas sécantes :

L'affirmation 3 est fausse.

Affirmation 4

La droite $\mathscr{D}_1$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ est orthogonal à un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$\mathscr{D}_1$ est dirigée par $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = 2\times 1 + (-3)\times 2 + 4\times 1 = 0$. Puisque $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = 0$, alors $\mathscr{D}_1$ est parallèle à $\mathscr{P}$:

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 2 Commun à tous/toutes les candidat/e/s 6 points

Partie A

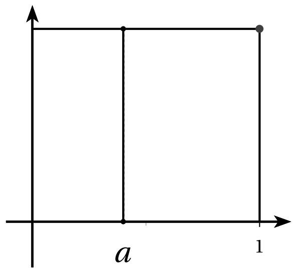
1. a. Dans la cas où f est une fonction constante strictement positive, on a :

$$A_1 = a\times f(0) \quad \text{u.a} \quad \text{et } A_2 = (1-a)\times f(0) \quad \text{u.a}$$

Par suite :

$$A_1 = A_2 \iff a\times f(0) = (1-a)\times f(0) \overset{f(0)\neq 0}{\iff} 1-a=a \iff a=\frac{1}{2}$$

La condition (E) est remplie pour un unique réel.



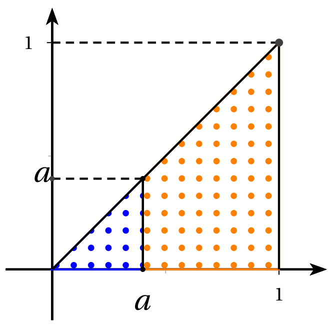
b. A_1 est l'aire d'un triangle rectangle, A_2 celle d'un trapèze :

$$A_1 = \frac{a^2}{2} \quad \text{u.a} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \text{u.a}$$

Par suite :

$$A_1 = A_2 \iff \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \iff a^2 = \frac{1}{2} \overset{a>0}{\iff} a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La condition (E) est remplie pour un unique réel.



2. a.

$$A_1 = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad A_2 = \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

b. Soit $a \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\iff \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\iff F(a) - F(0) = F(1) - F(a) \\ &\iff F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2} \end{aligned}$$

Puisqu'on a raisonné par équivalence, on a montré que

Le nombre réel a vérifie la condition (E) si et seulement si $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$

3. **a.** D'après ce qui précède, les valeurs de a pour lesquelles la condition (E) est vérifiée sont les solutions de l'équation

$F(x) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$ où F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle.

Puisqu'une primitive de la fonction exponentielle est elle-même, alors l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^1}{2}$$

soit :

$$\mathrm{e}^x = \frac{1+\mathrm{e}}{2}$$

ou encore :

$$x = \ln\frac{1+\mathrm{e}}{2}$$

La condition (E) est vérifiée pour l'unique nombre réel $\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$

b. Il suffit de prouver :

$$F\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{F(0)+F(1)}{2}$$

où F est une primitive sur $[0,1]$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$

Une primitive de f est F, définie sur $[0\,;\,1]$ par $F(x) = -\dfrac{1}{x+2}$.

Calculons chacun des deux nombres $\dfrac{F(0)+F(1)}{2}$ et $F\left(\frac{2}{5}\right)$:

$$\frac{F(0)+F(1)}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{12} \qquad \text{et} \qquad F\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{\frac{2}{5}+2} = -\frac{1}{\frac{12}{5}} = -\frac{5}{12}$$

Par conséquent :

La valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient

Partie B

1. Puisqu'une primitive de f est la fonction F définie sur $[0\,;\,1]$ par $F(x) = 4x - x^3$, on déduit de A. 2. a. que la condition (E) est vérifiée si et seulement si

$$4a - a^3 = \frac{4-1}{2}$$

soit :

$$a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}$$

a est donc une solution de l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$.

2. **a.**

$$u_1 = g(0) = \frac{3}{8}$$

b. La fonction g, en tant que fonction polynôme, est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et on a, pour tout nombre réel x de $[0\,;\,1]$:

$$g'(x) = \frac{3}{4}x^2$$

Puisque $g' \geqslant 0$ sur $[0; 1]$, la fonction g est croissante sur $[0; 1]$.

c. Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

• $\mathscr{P}_0$ s'écrit :

$$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$$

Puisque $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \text{et} \\ u_1 = \dfrac{3}{8} \end{array}\right.$, on a $0 \leqslant 0 \leqslant \dfrac{3}{8} \leqslant 1$:

$$\mathscr{P}_0 \text{ est vraie}$$

• Supposons la propriété $\mathscr{P}_p$ vraie pour tout entier naturel p. On a donc :

$$0 \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$$

Montrons alors que $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie, i.e :

$$0 \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$$

On a, par hypothèse :

$$0 \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$$

La fonction g étant croissante sur $[0,1]$, on en déduit :

$$g(0) \leqslant g(u_p) \leqslant g(u_{p+1}) \leqslant g(1)$$

soit :

$$\frac{3}{8} \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant \frac{5}{8}$$

On en déduit bien sûr :

$$0 \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$$

. On a prouvé :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \mathscr{P}_p \text{ est vraie} \Longrightarrow \mathscr{P}_{p+1} \text{ est vraie}$$

• On a prouvé d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

d. La suite u est croissante et majorée par 1 : elle converge donc, en vertu du théorème de la limite monotone, vers une limite ℓ comprise entre 0 et 1.

Puisque la fonction g est continue sur $[0; 1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell)$$

On a par ailleurs :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$

Puisque $u_{n+1} = g(u_n)$, on en déduit :

$$\ell = g(\ell)$$

soit

$$\ell = a$$

puisque l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution d'après la question 1.

e. Une valeur approchée de u_{10} à 10^{-8} près est 0,389 807 84

Exercice 3 Commun à tous/toutes les candidat/e/s 5 points

Partie A

1. **a.** L'expérience consistant à interroger une personne est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ en convenant d'appeler succès le fait que la personne accepte de répondre à la question. On est alors en présence d'une succession de 700 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes (puisque la probabilité qu'une personne accepte de répondre reste constante). La variable aléatoire X dénombrant les personnes ayant accepté de répondre suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

   b. D'après la calculette : $\text{P}(X \leqslant 399) \simeq 0,0573$.
   Par suite :

$$\text{P}(X \geqslant 400) = \text{P}(X > 399) = 1 - \text{P}(X \leqslant 399) \simeq 0,9427$$

La meilleure valeur approchée est $0,94$

2. Lorsque n personnes sont interrogées, notons X_n la variable aléatoire égale au nombre de personnes acceptant de répondre . X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0.6$.
   On cherche le plus petit entier n tel que $\text{P}(X_n \geqslant 400) > 0,9$.
   Puisque

$$\text{P}(X_n \geqslant 400) > 0,9 \iff 1 - \text{P}(X_n \leqslant 399) > 0,9 \iff \text{P}(X_n \leqslant 399) < 0,1$$

la question est de déterminer, parmi les entiers n vérifiant $\text{P}(X_n \leqslant 399) < 0,1$, le plus petit.

La calculette donne $\left\{\begin{array}{l} \text{P}(X_{693} \leqslant 399) \simeq 0,1034 \\ \text{et} \\ \text{P}(X_{694} \leqslant 399) \simeq 0,0955 \end{array}\right.$

Puisque la suite $(\text{P}(X_n \leqslant 399))$ est décroissante, alors

694 est le plus petit entier n convenant

Partie B

1. Puisque $n \geqslant 50$, alors $n \times f = 0,29 \times n \geqslant 0,29 \times 50$, soit $n \times f \geqslant 14,5$
   De manière analogue, $n \times (1 - f) = 0,71 \times n \geqslant 0,71 \times 50$, soit $n \times (1 - f) \geqslant 35,5$
   Puisque $\left\{\begin{array}{l} n \geqslant 30 \\ n \times f \geqslant 5 \\ n(1-f) \geqslant 5 \end{array}\right.$, les conditions d'application d'un intervalle de confiance sont vérifiées.

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, de la proportion de personnes favorables au projet est

$$\left[0,29-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 0,29+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

2. L'amplitude de l'intervalle précédent est inférieure ou égale à 0,04 si et seulement si

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04$$

Puisque

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \iff \frac{2}{0,04} \leqslant \sqrt{n} \overset{n>0}{\iff} n \geqslant \left(\frac{2}{0,04}\right)^2 \iff n \geqslant 2500$$

, alors

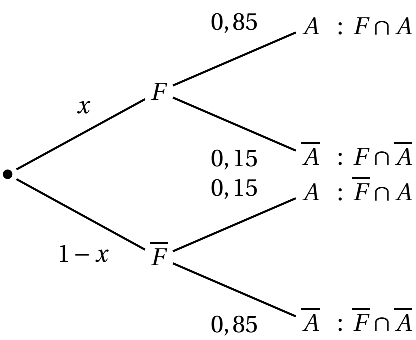
Le nombre minimum de personnes à interroger est 2 500

Partie C

1.

$$\mathrm{P}_F(A) = 0,85 \qquad \mathrm{P}_{\overline{F}}(A) = 0,15$$

2. a.



b. D'après l'arbre :

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(F\cap A) + \mathrm{P}\left(\overline{F}\cap A\right) = 0,85x + 0,15(1-x) = 0,7x + 0,15$$

Par suite :

$$0,7x + 0,15 = 0,29$$

3. La résolution de l'équation ci-dessus conduit à $x = 0,2$

Parmi les personnes ayant répondu 20 % sont réellement favorables au projet

Exercice 4 Candidat/e/s n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

1. $z_1 = \left(1+\dfrac{1}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}} = \dfrac{7}{6}\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{7}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{7}{12}+\mathrm{i}\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$:

$$z_1 = \frac{7}{12}+\mathrm{i}\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

2. $z_0 = \left(1+\dfrac{0}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times 0\times\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0} = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1$: $z_0 = 1$

$z_6 = \left(1+\dfrac{6}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times 6\times\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 2\pi} = 2(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi) = 2$: $z_6 = 2$

3.

Soit H_1 le pied de la hauteur du triangle OM_0M_1 issue de M_1.

Dans le triangle rectangle OM_1H_1, on a $\sin\widehat{M_0OM_1} = \dfrac{H_1M_1}{OM_1}$, soit

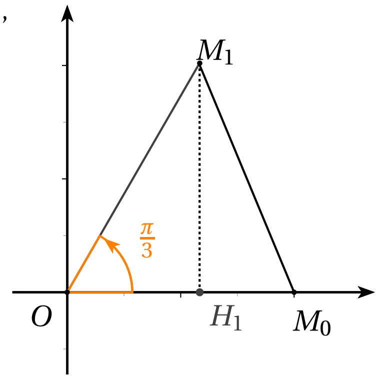
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{H_1M_1}{\frac{7}{6}}$$

On en déduit :

$$H_1M_1 = \frac{7}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

L'aire du triangle OM_0M_1 est alors égale, en u.a, à

$$\frac{OM_0\times H_1M_1}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$



Partie B

1.

$$OM_k = |z_{M_k}| = |z_k| = \left|\left(1+\frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right| = \left|1+\frac{k}{n}\right|\times\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right| = 1+\frac{k}{n}$$

2. Par hypothèse, on a : $z_k = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$. Puisque $1+\dfrac{k}{n} > 0$, alors $\arg(z_k) = \dfrac{2k\pi}{n}\ [2\pi]$.

Par suite :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_k}\right) = Arg\,(z_k) = \frac{2k\pi}{n}\ [2\pi] \qquad \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = Arg\,(z_{k+1}) = \frac{2(k+1)\pi}{n}\ [2\pi]$$

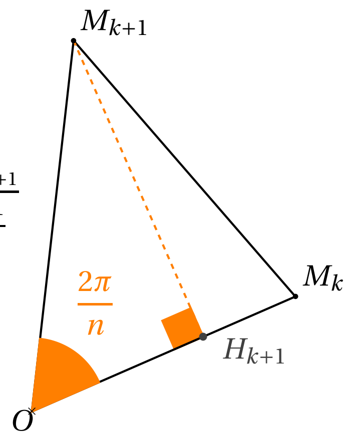
3.

$$\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_k}\right)+\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = -\frac{2k\pi}{n}+\frac{2(k+1)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}\ [2\pi]$$

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, notons H_{k+1} le pied de la hauteur issue du point M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}.

- Si $n = 2$, le triangle OM_0M_1 est plat : on a alors $M_1H_1 = 0$

• Supposons $n \geqslant 3$:
Que H_{k+1} appartienne à la demi-droite $[OM_k)$ (si $n \geqslant 3$) ou non (si $n = 3$), on a :



$$\sin\frac{2\pi}{n} = \sin\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \sin\widehat{H_{k+1}OM_{k+1}} = \frac{M_{k+1}H_{k+1}}{OM_{k+1}} = \frac{M_{k+1}H_{k+1}}{1+\dfrac{k+1}{n}}$$

Finalement :

$$M_{k+1}H_{k+1} = \left(1+\frac{k+1}{n}\right)\times\sin\frac{2\pi}{n}\ [2\pi]$$

4.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	5,731	6,848

5. Les deux lignes à compléter sont

L6 : Tant que $A < 7{,}2$

et

L13 : Afficher n

Remarque : on obtient n = 20.

Exercice 4 Candidat/e/s ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

D'une part :

$$\text{HI} \longrightarrow \begin{pmatrix} H \\ I \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 105 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Z \\ B \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$\text{LL} \longrightarrow \begin{pmatrix} H \\ I \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 24 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix}$$

Le mot HILL est chiffré par le mot ZBZY

Partie B

1. Puisque a et 26 sont premiers entre eux, alors, d'après le théorème de Bèzout, il existe deux entiers u et v tels que

$$au + 26v = 1$$

Puisque $26 \equiv 0 \mod 26$, alors $26v \equiv 26 \times 0 \mod 26$, soit $26v \equiv 0 \mod 26$.
En ajoutant au à chacun des deux membres de la congruence précédente, on obtient :

$$au + 26v \equiv au \mod 26$$

soit

$$au \equiv 1 \mod 26$$

$$\text{P.G.C.D }(a,26)=1 \Longrightarrow \exists u \in \mathbb{Z} \quad a \times u \equiv 1 \mod 26$$

2. a.

u	0	1	2	3	4	5
r	0	21	16	11	6	1

b. L'algorithme affiche 5, qui est donc le plus petit entier u tel que $a \times u \equiv 1 \mod 26$. Par suite :

$$5 \times 21 \equiv 1 \mod 26$$

3. **a.**
$$\begin{aligned}12A - A^2 &= 12\begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix}\\ &= 12\begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\times5+2\times7 & 5\times2+2\times7\\7\times5+7\times7 & 7\times2+7\times7\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}60 & 24\\84 & 84\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}39 & 24\\84 & 63\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}21 & 0\\0 & 21\end{pmatrix}\\ &= 21\times I\end{aligned}$$

b. L'égalité $12A - A^2 = 21I$ s'écrit $(12I - A)\times A = 21I$. Par suite :

$$B = 12I - A$$

c. Supposons :

$$A\times X = Y$$

Multiplions chacun des deux membres de l'égalité (à gauche) par B :

$$B\times A\times X = B\times Y$$

Puisque $BA = 21I$, l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$21X = BY$$

On a prouvé :

$$AX = Y \Longrightarrow 21X = BY$$

Partie C

1. Puisque, par hypothèse, Y=AX, on en déduit, d'après la partie précédente :

$$21X = BY$$

où B est la matrice $12I - A = \begin{pmatrix}12 & 0\\0 & 12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -2\\-7 & 5\end{pmatrix}$

• On a d'une part $21X = \begin{pmatrix}21x_1\\21x_2\end{pmatrix}$

• D'autre part :
$BY = \begin{pmatrix}7 & -2\\-7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7y_1 - 2y_2\\-7y_1 + 5y_2\end{pmatrix}$ On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{l}21x_1 = 7y_1 - 2y_2\\21x_2 = -7y_1 + 5y_2\end{array}\right.$$

2. Multiplions chacune des deux égalités ci-dessus par 5 :

$$\left\{\begin{array}{l} 105x_1 = 35y_1 - 10y_2 \\ 105x_2 = -35y_1 + 25y_2 \end{array}\right.$$

• Prouvons : $x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26$:
Puisque $105 \equiv 1 \mod 26$, alors

$$105x_1 \equiv x_1 \mod 26\ (a)$$

De $\left\{\begin{array}{l} 35 \equiv 9 \mod 26 \\ \text{et} \\ y_1 \equiv r_1 \mod 26 \end{array}\right.$, on déduit, par somme : $35y_1 \equiv 9r_1 \mod 26$ (1).

De $\left\{\begin{array}{l} -10 \equiv 16 \mod 26 \\ \text{et} \\ y_2 \equiv r_2 \mod 26 \end{array}\right.$, on déduit, par somme : $-10y_2 \equiv 16r_2 \mod 26$ (2).

En ajoutant membre à membre les congruences (1) et (2), on obtient

$$35y_1 - 10y_2 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26\ (b)$$

De (a) et (b) on déduit :

$$x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26$$

• Un raisonnement analogue montre que

$$x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 \mod 26$$

3.

$$VL \to \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9r_1 + 16r_2 \\ 17r_1 + 25r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 365 \\ 632 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \to BI$$

$$UP \to \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9r_1 + 16r_2 \\ 17r_1 + 25r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 715 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} \to EN$$

VLUP code le mot BIEN