Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers ∽ 15 juin 2009

EXERCICE 1 **5 points**

1. Restitution organisée de connaissances :

a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

b. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. a. Il faut calculer $p\left(\overline{R} \cap S\right)$.

Les évènements R et S étant manifestement indépendants, $\overline{R}$ et S le sont aussi.

Donc $p\left(\overline{R} \cap S\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p(S) = (1-0,1) \times 0,05 = 0,9 \times 0,05 = 0,045$.

b. Il faut que Stéphane entende son réveil et que son scooter marche. La probabilité qu'il soit à l'heure est donc égale à $p\left(\overline{R} \cap \overline{S}\right)$.

D'après la propriété démontrée au-dessus $\overline{R}$ et $\overline{S}$ sont indépendants, donc

$$p\left(\overline{R} \cap \overline{S}\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p\left(\overline{S}\right) = (1-0,1) \times (1-0,05) = 0,9 \times 0,95 = 0,855.$$

c. Si X est la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où Stéphane entend son réveil, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,9$.

La probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois est :

$p(X=4)+p(X=5) = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \times 0,9^4 \times 0,1 + \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \times 0,9^5 \times 0,1^0 = 0,5 \times 0,9^4 + 0,9^5 = 0,9^4 \times 1,9 = 0,918\,54 \approx 0,918\,5$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Figure

2. $\overrightarrow{\text{OA}}\,(3\,;\,4\,;\,0)$, d'où $\text{OA}^2 = 9+16 = 25$;

$\overrightarrow{\text{OC}}\,(0\,;\,0\,;\,5)$, d'où $\text{OC}^2 = 25$;

$\overrightarrow{\text{AC}}\,(-3\,;\,-4\,;\,5)$, d'où $\text{AC}^2 = 9+16+25 = 50$;

$\overrightarrow{\text{OB}}\,(0\,;\,5\,;\,0)$, d'où $\text{OB}^2 = 25$;

$\overrightarrow{\text{BC}}\,(0\,;\,-5\,;\,5)$, d'où $\text{BC}^2 = 25+25 = 50$;

On a donc $25+25 = 50 \iff \text{OA}^2 + \text{OC}^2 = \text{AC}^2 \iff$ (OAC est un triangle rectangle en O et isocèle car $\text{OA}^2 = \text{OC}^2$.

De même $25+25 = 50 \iff \text{OB}^2 + \text{OC}^2 = \text{BC}^2 \iff$ (OBC est un triangle rectangle en O et isocèle car $\text{OB}^2 = \text{OC}^2$.

$\overrightarrow{\text{AB}}\,(-3\,;\,1\,;\,0)$, d'où $\text{AB}^2 = 9+1 = 10$; on a vu que $\text{AC}^2 = 50$ et que $\text{BC}^2 = 50$

Donc le triangle ABC est isocèle en B, mais pas rectangle.

3. Soit H le point de coordonnées $\left(\dfrac{15}{19}\,;\,\dfrac{45}{19}\,;\,\dfrac{45}{19}\right)$.

a. $\mathrm{I}\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{9}{2}\,;\,0\right)$.
$\overrightarrow{\mathrm{HC}}\left(-\dfrac{15}{19}\,;\,-\dfrac{45}{19}\,;\,5-\dfrac{45}{19}\right)$ ou encore $\overrightarrow{\mathrm{HC}}\left(-\dfrac{15}{19}\,;\,-\dfrac{45}{19}\,;\,\dfrac{50}{19}\right)$;
$\overrightarrow{\mathrm{CI}}\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{9}{2}\,;\,-5\right)$.
En comparant les dernières coordonnées de ces deux vecteurs, on constate que $\overrightarrow{\mathrm{HC}}=-\dfrac{10}{19}\overrightarrow{\mathrm{CI}}$, c'est-à-dire que ces vecteurs sont colinéaires, ou encore que les points H, C et I sont alignés.

b. I milieu de [AB] appartient au plan (ABC), donc le point H aligné avec I et C aussi.
D'autre part $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\left(\dfrac{15}{19}\,;\,\dfrac{45}{19}\,;\,\dfrac{45}{19}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,(3\,;\,-1\,;\,0)$.
Donc $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\dfrac{45}{19}-\dfrac{45}{19}=0$, donc ces vecteurs sont orthogonaux.
$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,(0\,;\,-5\,;\,5)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{45}{19}-\dfrac{45}{19}=0$: ces vecteurs sont orthogonaux.
Conclusion : $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est orthogonal à ce plan et O a pour projeté orthogonal sur ce plan le point H.

c. Il en résulte qu'une équation du plan (ABC) est
$\dfrac{15}{19}x+\dfrac{45}{19}y+\dfrac{45}{19}z+d=0 \iff x+3y+3z+d'=0$.
Or $\mathrm{C}(0\,;0\,;5)\in(\mathrm{ABC}) \iff 15+d'=0 \iff d'=-15$.
Une équation du plan (ABC) est donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathrm{ABC}) \iff x+3y+3z-15=0$$

4. Calculs d'aire et de volume.

a. On a vu que OAC et OBC sont isocèles en O ; on a donc OA = OC = OB ; le triangle OAB est donc isocèle en O. I milieu de [AB] est donc le pied de la hauteur issue de O.
L'aire du triangle OAB est donc : $\dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{OI}}{2}$.
On a $\mathrm{AB}^2=10$, donc $\mathrm{AB}=\sqrt{10}$; $\mathrm{OI}^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{81}{4}=\dfrac{90}{4}$, donc $\mathrm{OI}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.
L'aire est donc égale à : $\dfrac{\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{2}}{2}=\dfrac{15}{2}$.
On a démontré que (OC) est perpendiculaire à (OA) et à (OB), donc la droite (OC) est orthogonale au plan (OAB). [OC] est donc la hauteur relative à la base (OAB) et le volume du tetraèdre est donc :

$$V=\dfrac{\mathcal{A}_{(\mathrm{OAB})}\times\mathrm{OC}}{3}=\dfrac{\frac{15}{2}\times 5}{3}=\dfrac{25}{2}.$$

b. On a vu que cette distance est égale à OH.
$\mathrm{OH}^2=\left(\dfrac{25}{19}\right)^2+\left(\dfrac{45}{19}\right)^2+\left(\dfrac{45}{19}\right)^2=\dfrac{225+2025+2025}{19^2}=\dfrac{4275}{19^2}$, d'où
$\mathrm{OH}=\dfrac{15\sqrt{19}}{19}$.
Remarque. On peut aussi utiliser l'équation du plan (ABC) :
$\mathrm{d}(\mathrm{O}\,;(\mathrm{ABC}))=\dfrac{|0+3\times0+3\times0-15|}{\sqrt{1^2+3^2+3^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{19}}=\dfrac{15\sqrt{19}}{19}$.

c. D'après ce qui a été démontré au dessus [OH] est la hauteur issue de O dans le tétraèdre OABC; donc le volume du tétraèdre OABC peut également s'écrire $\dfrac{\mathscr{A}_{(\text{ABC})} \times \text{OH}}{3}$.

Donc $\dfrac{25}{2} = \mathscr{A}_{(\text{ABC})} \times \dfrac{15\sqrt{19}}{19} \times \dfrac{1}{3}$, d'où $\mathscr{A}_{(\text{ABC})} = \dfrac{25}{2} \times \dfrac{19}{15\sqrt{19}} = \dfrac{5\sqrt{19}}{2}$.

Remarque. On peut aussi calculer directement $\mathscr{A}_{(\text{ABC})}$, même si ce n'est pas l'objectif des questions :

Comme démontré précédemment, (ABC) est un triangle isocèle non rectangle en C. La hauteur issue de C est donc [IC].

$$\mathscr{A}_{(\text{ABC})} = \dfrac{\text{AB} \times \text{CI}}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \times \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + 5^2} = \dfrac{5\sqrt{19}}{2}.$$

EXERCICE 2 — 5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Le couple (9; 1) est une solution relativement évidente de l'équation car $3 \times 9 + 2 \times 1 = 29$.

b. $\left\{\begin{array}{lcl} 3x + 2y & = & 29 \\ 3 \times 9 + 2 \times 1 & = & 29 \end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence)$3(x-9) = 2(y-1) = 0 \iff 3(x-9) = 2(1-y) \quad (1)$.

Comme 3 est premier avec 2, d'après le théorème de Gauss, 3 divise $1-y$.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1 - y = 3k \iff y = 1 - 3k$.

En reportant dans l'égalité (1), on obtient $3(x-9) = 2 \times 3k \iff$

$(x-9) = 2k \iff x = 9 + 2k$.

Vérification : quel que soit l'entier k, $3(9+2k) + 2(1-3k) = 27 + 2 = 29$.

L'ensemble des couples est donc $\{(9+2k\ ;\ 1-3k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

c. On a $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \iff 9 + 2k \geqslant 0,\ 1 - 3k \geqslant 0 \iff k \geqslant -\dfrac{9}{2}$ et $x \leqslant \dfrac{1}{3}$.

Les valeurs possibles pour k sont donc : -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ce qui correspond aux couples solutions : (1; 13), (3; 10), (5; 7), (7 ; 4) et (9; 1) déjà trouvé.

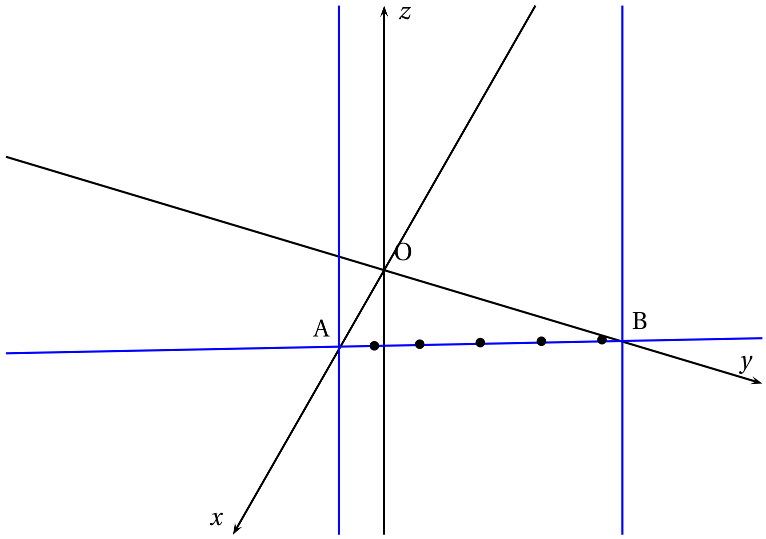
2. a. On sait qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $\mathscr{P}$ a pour coordonnées (3; 2; 0) et $\overrightarrow{k}$ (0 ; 0 ; 1). Donc $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{k} = 0$. $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux, ce qui montre que $\mathscr{P}$ est parallèle à l'axe (Oz).

b.
- L'axe (Ox) est défini par le système $y = 0$ et $z = 0$; les points communs à $\mathscr{P}$ et à (Ox) vérifient donc :
  $\left\{\begin{array}{lcl} 3x + 2y & = & 29 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow x = \dfrac{29}{3}$. Le point commun a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{29}{3}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$.
- L'axe (Oy) est défini par le système $x = 0$ et $z = 0$; les points communs à $\mathscr{P}$ et à (Oy) vérifient donc :
  $\left\{\begin{array}{lcl} 3x + 2y & = & 29 \\ x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow y = \dfrac{29}{2}$. Le point commun a donc pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{29}{2}\ ;\ 0\right)$.

c. L'intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan xOy est la droite (AB).

$\mathscr{P}$ étant parallèle à (Oz) l'intersection de $\mathscr{P}$ et du plan xOz est la droite contenant A et parallèle à (Oz).

$\mathscr{P}$ étant parallèle à (Oz) l'intersection de $\mathscr{P}$ et du plan yOz est la droite contenant B et parallèle à (Oz).



d. Ces points correspondent aux couples solutions de l'équation initiale avec des termes positifs, soit les points :

(1 ; 13 ; 0), (3 ; 10 ; 0), (5 ; 7 ; 0), (7 ; 4 ; 0) et (9 ; 1 ; 0) (voir la figure au dessus).

3. a. Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient

$\left\{\begin{array}{l c l}4z&=&xy\\z&=&0\end{array}\right. \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

La réponse est la figure n° 3.

b. Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient

$\left\{\begin{array}{l c l}4z&=&xy\\z&=&1\end{array}\right. \Rightarrow xy = 4 \Rightarrow y = \dfrac{4}{x}$. On reconnait l'équation d'une hyperbole.

La réponse est la figure n° 1.

c. Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient

$\left\{\begin{array}{l c l}4z&=&xy\\y&=&8\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}4z&=&8x\\y&=&8\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}z&=&2x\\y&=&8.\end{array}\right.$

On reconnait l'équation d'une droite de coefficient directeur 2.

La réponse est la figure n° 4.

d. Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient

$\left\{\begin{array}{l c l}4z&=&xy\\3x+2y&=&29\end{array}\right.$

On a trouvé à la question précédente les points dont les coordonnées vérifient la deuxième équation :

- $x = 1,\ y = 13 \Rightarrow 4z = 13 \iff z = \dfrac{13}{4}$;
- $x = 3,\ y = 10 \Rightarrow 4z = 30 \iff z = \dfrac{15}{2}$;
- $x = 5,\ y = 7 \Rightarrow 4z = 35 \iff z = \dfrac{35}{4}$;
- $x = 7,\ y = 4 \Rightarrow 4z = 28 \iff z = 7$;
- $x = 9,\ y = 1 \Rightarrow 4z = 9 \iff z = \dfrac{9}{4}$.

EXERCICE 3 **4 points**

1. Si $z = x + \mathrm{i}y$, alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$.
   Alors $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = x^2 - y^2$ et $(\mathrm{Re}(z))^2 = x^2$.
   La proposition est fausse.
2. Les trois points appartiennent à un même cercle de centre si et seulement si leur modules sont égaux.
   Or $\left|\overline{z}\right| = |z|$ et $\left|\dfrac{z^2}{\overline{z}}\right| = \dfrac{\left|z^2\right|}{\left|\overline{z}\right|} = \dfrac{|z|^2}{|z|} = |z|$.
   La proposition est vraie.
3. On a $|1 + \mathrm{i}z| = |1 - \mathrm{i}z| \iff |\mathrm{i}z - (-1)| = |\mathrm{i}z - 1|$ qui signifie que le point d'affixe $\mathrm{i}z$ est équidistant des points d'affixe 1 et -1. Ces points étant sur l'axe des abscisses et symétriques autour de O, il en résulte que le point d'affixe $\mathrm{i}z$ est sur l'axe des ordonnées, ou encore $\mathrm{i}z = \mathrm{i}\alpha (\alpha \in \mathbb{R}) \iff z = \alpha$.
   La proposition est vraie.
4. Soit P le point tel que OMPM' soit un parallélogramme.
   On a $z + z' = \overrightarrow{\mathrm{O}M} + \overrightarrow{\mathrm{O}M'} = \overrightarrow{\mathrm{O}P}$;
   De même $z - z' = \overrightarrow{\mathrm{O}M} - \overrightarrow{\mathrm{O}M'} = \overrightarrow{\mathrm{O}M} + \overrightarrow{M'\mathrm{O}} = \overrightarrow{M'M}$.
   Donc $|z + z'| = |z - z'| \iff \mathrm{O}P = M'M$.
   Donc le parallélogramme OMPM' a ses diagonales de même longueur, autrement dit c'est un rectangle et donc les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.
   La proposition est vraie.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A :

1. Soient n et p deux naturels distincts.
   $f_n(x) = f_p(x) \iff \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-px}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \iff \mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-px}$ (car $1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$) $\iff$ $-nx = -px$ (par croissance de la fonction ln) $\iff x = 0$ (car $n \neq p$).
   Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{1 + \mathrm{e}^0} = \dfrac{1}{2}$.
   Toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ contiennent le point $\left(0\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$.
   Remarque : On peut également calculer directement $f_n(0) = \ldots = \dfrac{1}{2}$.
2. Étude de la fonction f_0
   a. $f_0(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.
   Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_0'(x) = -\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $(1 + \mathrm{e}^{-x})^2 >$, on en déduit que $f_0'(x) > 0$.
   La fonction f_0 est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
   b. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.
   Donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = 0$. Ceci signifie que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_0$ au voisinage de $-\infty$.
   On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = 1$.
   Ceci signifie que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_0$ au voisinage de $+\infty$.

c. Tableau très simple : sur $\mathbb{R}$, f_0 croît de 0 à 1.

3. Étude de la fonction f_1

a. On a $f_1(-x) = \dfrac{\text{e}^x}{1+\text{e}^x} = \dfrac{1}{\text{e}^{-x}+1} = f_0(x)$ en multipliant chaque terme par le facteur non nul e^{-x}.

b. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(-x) = \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$

De même $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_1(-x) = \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} f_0(x) = 0$.

Comme $f_0(x) = f_1(-x)$, f_0 fonction croissante est la composée de f_1 et de la fonction $x \longmapsto -x$ qui est décroissante. Il en résulte que f_1 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. $f_0(x) = f_1(-x)$ signifie que deux points d'abscisses de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ ont la même ordonnée : ces points sont symétriques par rapport à l'axe $(\text{O}y)$.

$\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$

a. $f_n(x) = \dfrac{\text{e}^{-nx}}{1+\text{e}^{-x}}$. En multipliant chaque terme par $\text{e}^{nx} > 0$,

$f_n(x) = \dfrac{1}{\text{e}^{nx}+\text{e}^{(n-1)x}}$.

b. Pour $p \geqslant 2$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{px} = +\infty$, donc en utilisant l'écriture du **a.**,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Limite en $-\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{nx} = 0_+$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{(n-1)x} = 0_+$ donc par limite de l'inverse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$

c. f_n quotient de sommes de fonctions dérivables est dérivable car $\text{e}^{nx}+\text{e}^{(n-1)x} > 0$.

En utilisant l'écriture trouvée au début de la question :

$f_n'(x) = -\dfrac{n\text{e}^{nx}+(n-1)\text{e}^{(n-1)x}}{\left(\text{e}^{nx}+\text{e}^{(n-1)x}\right)^2}$.

Comme $n \geqslant 2$, cette dérivée est négative quel que soit x réel. Les fonctions $(f_n,\ n \geqslant 2)$ sont donc décroissantes de $+\infty$ à 0.

Partie B : *Étude d'une suite liée aux fonctions f_n*

1. • $u_1(x) = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\text{d}x = \int_0^1 \frac{\text{e}^{-x}}{1+\text{e}^{-x}}\,\text{d}x$.

En posant $u(x) = 1+\text{e}^{-x}$, $u'(x) = -\text{e}^{-x}$, on remarque que la fonction à intégrer est $-\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ dont une primitive est la fonction $-\ln(1+\text{e}^{-x})$.

Donc $u_1(x) = [-\ln(1+\text{e}^{-x})]_0^1 = -\ln\left(1+\text{e}^{-1}\right) + \ln 2$.

• $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0\,\text{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+\text{e}^{-x}}\,\text{d}x = \int_0^1 \frac{(1+\text{e}^{-x})-\text{e}^{-x}}{1+\text{e}^{-x}}\,\text{d}x =$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\text{e}^{-x}}{1+\text{e}^{-x}}\,\text{d}x + \int_0^1 \frac{-\text{e}^{-x}}{1+\text{e}^{-x}}\,\text{d}x = \int_0^1 1\,\text{d}x - u_1(x) = 1 - u_1(x)$.

Or $u_0 = 1 - u_1(x) \iff u_0 + u_1 = 1$.

• Autre méthode (plus simple) :

$u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 f_0\,\text{d}x + \int_0^1 f_1\,\text{d}x = \int_0^1 \left(f_0+f_1\right)\,\text{d}x$ (par linéarité de l'intégrale).

$u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\text{e}^{-x}} + \frac{\text{e}^{-x}}{1+\text{e}^{-x}}\,\text{d}x = \int_0^1 \frac{1+\text{e}^{-x}}{1+\text{e}^{-x}}\,\text{d}x = \int_0^1 1\,\text{d}x = [x]_0^1 = 1$.

Donc $u_0 = 1 - u_1(x) = 1 - \left(-\ln\left(1+\text{e}^{-1}\right) + \ln 2\right) = 1 + \ln\left(1+\text{e}^{-1}\right) - \ln 2$.

2. On a la suite d'inéquations :

$\mathrm{e}^{-x} > 0 \iff 1+\mathrm{e}^{-x} > 1 \iff 0 < \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} < 1 \iff 0 < \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} < \mathrm{e}^{-nx}$.

En intégrant ces trois fonctions sur $[0\,;\,1]$:

$0 < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \iff 0 < u_n < \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

3. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-n}-1\right) = \dfrac{1}{n}\left(1-\mathrm{e}^{-n}\right)$.

Par limite au voisinage de $+\infty$:

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-n} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc par produit :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n}\left(1-\mathrm{e}^{-n}\right) = 0$.

En utilisant l'encadrement de la question **2.**, et d'après le théorème des « gendarmes », on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n = 0$. La suite est donc convergente.